TD 6 : Séries

1 Exercices d'application directe du cours

1 Calculer les sommes suivantes (déterminer si besoin les réels x pour lesquels la série converge).

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^n}$ rép : $-\dfrac{2}{5}$
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)\,x^{2n}$ rép : $\dfrac{2x^2}{(1-x^2)^3}$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^n}\,n(n+1)$ rép : $-\dfrac{36}{125}$
4. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (2+(-1)^n)\,3^{-n}$ rép : $\dfrac{5}{12}$
5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2-n+1}{n!}\,x^n$ rép : $(1+x^2)e^x$

2 Soit un réel x. Établir la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\cos(nx)}{2^n}$.

3 On pose pour tout entier nature non nul :

$$u_n = \frac{n-1}{n\,(n+1)\,(n+2)}$$

1. Trouver rois réels a, b, c indépendants de n tels que : $\forall n \geqslant 1 \quad u_n = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{n+2}$.
2. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ et calculer le cas échéant sa somme.

2 Exercices classiques

3

1. Pour tout entier naturel k, on pose :
$$I_k = \int_0^1 \frac{x^k}{1+x^2}\,dx$$
Montrer que $I_k \leqslant \dfrac{1}{k+1}$ et calculer $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} I_k$.
2. Pour tout entier naturel n, on pose
$$u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$
Vérifier que $u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 x^{2n}\,dx$.
3. Démontrer la convergence de la série de terme général u_n en exprimant ses sommes partielles à l'aide des termes de (I_n), et calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

4

1. Soit $x \in [-1, 1[$ un réel. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt.$$

2. En déduire que après avoir établi l'existence des sommes :

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\,2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

$\boxed{5}$ 1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$\frac{1}{n\,\ln n} \geqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{x\,\ln x}\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{(n+1)\,\ln(n+1)}.$$

2. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\,\ln n}$.

3. Donner un équivalent des sommes partielles de cette dernière série.