Semaine 9
du lundi 27 novembre au vendredi 1er décembre 2023

Espaces vectoriels

Structure d'espace vectoriel ($\mathbb{K}^n$,$\mathbb{K}^I$ ou $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$ où I est un intervalle, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$)
Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs
Sous-espaces vectoriels
Intersection d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels
Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs. Notation $\mathrm{Vect}(x_1,x_2,,x_k)$
Famille génératrice finie d'un espace vectoriel (sous réserve d'existence)
Famille libre finie. Famille liée finie
Exemple fondamental de famille libre : toute famille finie de polynômes de degrés deux à deux distincts est libre
Base finie d'un sous-espace vectoriel (sous réserve d'existence)
Coordonnées d'un vecteur dans une base
Matrice des coordonnées d'une famille finie de vecteurs dans une base
Base canonique de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}_n[X]$
De toute famille génératrice finie d'un espace vectoriel E, on peut extraire une base
Toutes les bases de E ont le même cardinal
Dimension d'un espace vectoriel E
Dans un espace vectoriel de dimension n :
toute famille libre a au plus n éléments
toute famille libre ayant n élements est une base
toute famille génératrice a au moins n éléments
une famille génératrice ayant n éléments est une base
Si F est un sous-espace vectoriel de d'un espace vectoriel E de dimension finie alors :
F est de dimension finie
$\dim F \leqslant \dim E$
$F = E \Leftrightarrow \dim F = \dim E$
Rang d'une famille finie de vecteurs

Questions de cours

Définition d'un sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E
Définition d'une base et de la dimension d'un espace vectoriel.
Définition du rang d'un système de vecteurs d'un espace vectoriel.
Définition d'une famille libre $(u_1,u_2,\cdots,u_k)$ de vecteurs dans un espace vectoriel E.
Définition d'une famille génératrice dans un espace vectoriel E.
Caractérisation à l'aide du rang d'une famille libre d'une famille de p vecteurs de E de dimension n.
Caractérisation à l'aide du rang d'une famille génératrice d'une famille de p vecteurs de E de dimension n.
Caractérisation à l'aide du rang d'une base d'une famille de p vecteurs de E de dimension n.
Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases d'un espace vectoriel E de dimension n.
On appelle P la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$.
Si x est un vecteur de E, quelle relation lie $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_1}(x)$ et $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_2}(x)$?