Corrigé DM4

1. **a.** Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$ et $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.

On a $xI + yJ + zK + tL = M \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ y-t & x-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+z = a \\ y+t = b \\ y-t = c \\ x-z = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (a+d)/2 \\ y = (b+c)/2 \\ z = (a-d)/2 \\ t = (b-c)/2 \end{cases}.$$

Ainsi, $\forall M \in E$, $\exists!(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid M = xI + yJ + zK + tL$ donc $\boxed{\mathcal{B} = (I,J,K,L) \text{ est une base de } E}$.

b. On utilise les coordonnées de I, J, K et L dans la base canonique de E pour définir la matrice de passage de la base canonique de E à la base $\mathcal{B}$: $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}$.

2. On pose $F_1 = \{M \in E \mid JMJ = M\}$ et $F_2 = \{M \in E \mid JMJ = -M\}$

a. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. $M \in F_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} d = a \\ c = b \end{cases}.$$

Ainsi $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in F_1 \Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = aI + bJ$.

Donc $F_1 = vect(I,J)$ et comme I et J ne sont pas colinéaires, elles forment une partie libre. On en conclut que $\boxed{F_1 \text{ est un sous-espace vectoriel de } E,\ (I,J) \text{ en est une base et } \dim F_1 = 2}$.

b. **i.** $F_2 \subset E$ et $O_2 \in F_2$

Pour tout $(M,N) \in F_2^2$: $J(\lambda M + N)J = -\lambda M - N$ donc $\lambda M + N \in F_2$.

Ainsi $\boxed{F_2 \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$.

ii. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. $M \in F_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -a \\ c = -b \end{cases}$.

Ainsi $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in F_2 \Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix} = aK + bL$.

Donc $F_2 = vect(K,L)$ et comme K et L ne sont pas colinéaires, elles forment une partie libre.On en conclut que $\boxed{(K,L) \text{ est une base de } F_2 \text{ et } \dim F_2 = 2}$.

3. **a.** Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ deux matrices de E. $MN = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$:

```
def produit(M,N):
    a,b,c,d = M[0][0],M[0][1],M[1][0],M[1][1]
    e,f,g,h = N[0][0],N[0][1],N[1][0],N[1][1]
    return [[a*e+b*g,a*f+b*h],[c*e+d*g,c*f+d*h]]
```

b. Les instructions

```
J,K,L = [[0,1],[1,0]], [[1,0],[0,-1]], [[0,1],[-1,0]]
for M in [J,K,L]:
    for N in [J,K,L]:
        print(M,"*",N,"=",produit(M,N))
```

affichent

```
[[0, 1], [1, 0]] * [[0, 1], [1, 0]] = [[1, 0], [0, 1]]
[[0, 1], [1, 0]] * [[1, 0], [0, -1]] = [[0, -1], [1, 0]]
[[0, 1], [1, 0]] * [[0, 1], [-1, 0]] = [[-1, 0], [0, 1]]
[[1, 0], [0, -1]] * [[0, 1], [1, 0]] = [[0, 1], [-1, 0]]
[[1, 0], [0, -1]] * [[1, 0], [0, -1]] = [[1, 0], [0, 1]]
[[1, 0], [0, -1]] * [[0, 1], [-1, 0]] = [[0, 1], [1, 0]]
[[0, 1], [-1, 0]] * [[0, 1], [1, 0]] = [[1, 0], [0, -1]]
[[0, 1], [-1, 0]] * [[1, 0], [0, -1]] = [[0, -1], [-1, 0]]
[[0, 1], [-1, 0]] * [[0, 1], [-1, 0]] = [[-1, 0], [0, -1]]
```
.

Ces résultats permettent de penser que
$\boxed{J^2 = I,\ JK = -L,\ JL = -K,\ KJ = L,\ K^2 = I,\ KL = J,\ LJ = K,\ LK = -J \text{ et } L^2 = -I}$.

On vérifie aisément ces résultats par le calcul.

4. a. Soit $(M,M') \in F_1^2$ alors $JMJ = M$ et $JM'J = M'$ donc $(JMJ)(JM'J) = MM'$
Or $(JMJ)(JM'J) = JMJ^2M'J$ et $J^2 = I$ donc $J(MM')J = MM'$ et par conséquent $MM' \in F_1$.
On a bien $\boxed{\forall (M,M') \in F_1^2,\ MM' \in F_1 \text{ et } F_1 \text{ est stable pour le produit matriciel}}$.

b. Si $(M,M') \in F_2^2$ alors $JMJ = -M$, $JM'J = -M'$ et $(JMJ)(JM'J) = (-M)(-M') = MM'$.
Donc $J(MM')J = MM'$ puis $MM' \in F_1$. On a bien $\boxed{\forall (M,M') \in F_2^2,\ MM' \in F_1}$.

5. a. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, on cherche $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ tel que $A = xI + yJ + zK + tL$.

D'après **1a**. $\begin{cases} x = 1/2 \\ y = 0 \\ z = 5/2 \\ t = -1 \end{cases}$ donc $\boxed{\text{le quadruplet des coordonnées de } A \text{ dans } \mathcal{B} \text{ est } \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{5}{2}, -1\right)}$.

b. On a alors $A = \frac{1}{2}I + \frac{5}{2}K - 1L$.
$\boxed{\text{En posant } A_1 = \frac{1}{2}I \text{ et } A_2 = \frac{5}{2}K - L,\ (A_1,A_2) \in F_1 \times F_2 \text{ et } A = A_1 + A_2}$.

6. a. Soit $M \in E$. Comme $\mathcal{B}$ est une base de E, il existe $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ tel que $M = xI + yJ + zK + tL$.
$\boxed{\text{En posant } M_1 = \frac{1}{2}I \text{ et } M_2 = \frac{5}{2}K - L,\ (M_1,M_2) \in F_1 \times F_2 \text{ et } M = M_1 + M_2}$.

b. Supposons qu'il existe $(M_1,M_2) \in F_1 \times F_2$ et $(N_1,N_2) \in F_1 \times F_2$ tels que $M = M_1 + M_2$ et $M = N_1 + N_2$.
Alors $M_1 + M_2 = N_1 + N_2$ et donc $M_1 - N_1 = -(M_2 - N_2)$.
Or $M_1 - N_1 \in F_1$ et $M_2 - N_2 \in F_2$ donc il existe $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $M_1 - N_1 = aI + bJ$ et $M_2 - N_2 = cK + dL$.
On a alors $M_1 - N_1 = -(M_2 - N_2) \Leftrightarrow aI + bJ = -(cK + dL)$ soit $aI + bJ + cK + dL = 0$.
Comme $\mathcal{B}$ est une partie libre, $a = b = c = d = 0$.
On en déduit que $M_1 - N_1 = M_2 - N_2 = 0$ soit $M_1 = N_1$ et $M_2 = N_2$.
Ainsi, $\boxed{\text{le couple } (M_1,M_2) \in F_1 \times F_2 \text{ tel que } M = M_1 + M_2 \text{ est unique}}$.