DM5	Série alternée de Bertrand

pour jeudi 30 novembre

On pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln n}$ pour tout entier $n \geqslant 2$.
On note $(S_n)_{n\geqslant 2}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$.

1. **a.** Écrire une fonction Python `serie` de paramètre n qui renvoie la valeur de S_n.

b. À l'aide de la fonction précédente, représenter graphiquement la suite $(S_n)_{n\geqslant 2}$. Conjecturer la nature de la série.

c. Montrer que les suites extraites $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

d. Écrire un script qui permet de déterminer une valeur approchée de la somme de la série à 10^{-2} près.

2. **a.** Montrer que : $\exists n_0 \in \mathbb{N}^* \mid \forall n \geqslant n_0,\ \ln n \leqslant \sqrt{n}$.

b. En déduire que la série de terme général u_n n'est pas absolument convergente.

c. Écrire une fonction Python `seuil` qui prend en argument un flottant M et qui renvoie le plus petit entier n tel que $\sum\limits_{k=2}^{n} |u_k| > M$.

3. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose $v_n = u_n^2$.

a. Montrer que : $\forall k \geqslant 3,\ \dfrac{1}{k(\ln k)^2} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^2}$.

b. En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} v_n$ est convergente.