DM5 - Corrigé - Série alternée de Bertrand

1. **a.** Comme il s'agit d'une série alternée, il est judicieux de définir un signe au lieu d'utiliser $(-1)^n$.

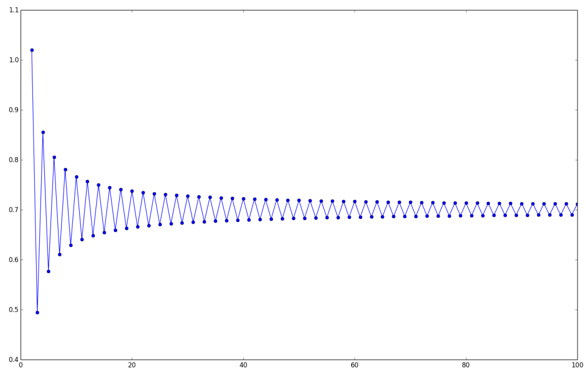
```
import math as m

def serie(n):
    S = 0
    signe = 1
    for k in range (2,n+1):
        S = S + signe/(m.sqrt(k)*m.log(k))
        signe = -signe
    return S
```

b. On représente la suite $(S_n)_{n\geqslant 2}$ à l'aide des deux listes $Ln = [\![2, N]\!]$ et $Ls = [S_n \mid n \in Ln]$.

```
import matplotlib.pyplot as plt
N = 100
Ln = range(2,N+1)
LS = [serie(n) for n in Ln]

plt.plot(Ln,LS,marker='o')
plt.show()
```



On constate qu'il y a une asymptote horizontale aux alentours de 0,7 donc $\boxed{\text{on conjecture que la série } \sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\,\ln n} \text{ est convergente}}$.

c. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$\bullet S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} + u_{2n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{2n+2}\,\ln(2n+2)} - \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}\,\ln(2n+1)}$.

En posant $h(t) = \sqrt{t}\,\ln t$, on a $S_{2n+2} - S_{2n} = \dfrac{1}{h(2n+2)} - \dfrac{1}{h(2n+1)}$.

Or h est strictement croissante sur $[2, +\infty[$ (puisque h est dérivable et $h'(t) = \dfrac{\ln t}{2\sqrt{t}} + \dfrac{1}{\sqrt{t}} > 0$).

On en déduit que $h(2n+2) > h(2n+1)$, donc $\dfrac{1}{h(2n+2)} < \dfrac{1}{h(2n+1)}$ et $S_{2n+2} - S_{2n} < 0$

La suite $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$ est strictement décroissante.

$\bullet S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+3} + u_{2n+2} = \dfrac{-1}{\sqrt{2n+3}\,\ln(2n+3)} + \dfrac{1}{\sqrt{2n+2}\,\ln(2n+2)} > 0.$

La suite $(S_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ est strictement croissante.

$\bullet S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1} = -\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}\,\ln(2n+1)}$ donc $\lim_{n\to+\infty}(S_{2n+1} - S_{2n}) = 0$.

On a montré que $\boxed{\text{les suites } (S_{2n})_{n\geqslant 1} \text{ et } (S_{2n+1})_{n\geqslant 1} \text{ sont adjacentes}}$. Donc elles convergent vers une même limite.

Par le théorème sur les suites extraites, on en déduit que la suite $(S_n)_{n\geqslant 2}$ est convergente, autrement dit, que $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\,\ln n} \text{ est convergente}}$.

d. Comme les suites extraites $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes, $\forall n \geqslant 2,\ S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n}$.
Donc $\dfrac{S_{2n+1}+S_{2n}}{2}$ est une valeur approchée de S à ε près dès que $S_{2n} - S_{2n+1} \leqslant \varepsilon$.

```
def val_app(eps):
    n = 1
    a, b = serie(2), serie(3)
    while a-b > eps :
        n += 1
        a, b = serie(2*n), serie(2*n+1)
    return ((a+b)/2)
```

Comme l'instruction $val\_app(round(10 ** (-2), 2))$ renvoie 0.70,
$\boxed{\text{une valeur approchée de la somme de la série à } 10^{-2} \text{ près est } 0,7}$.

e. Par croissance comparée, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0$ donc, par définition de limite :

pour $\varepsilon = 1$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geqslant n_0,\ \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}} \leqslant 1$ et comme $\sqrt{n} > 0$, on a bien

$\boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geqslant n_0,\ \ln n \leqslant \sqrt{n}}$.

f. Pour tout $n \geqslant 2$, $|u_n| = \dfrac{1}{\sqrt{n}\,\ln n}$. D'après **4a.**, $\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geqslant n_0,\ \ln n \leqslant \sqrt{n}$ donc
$\dfrac{1}{\sqrt{n}\,\ln n} \geqslant \dfrac{1}{n}$.

Comme la série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente, par comparaison des séries à termes positifs, la série
$\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}\,\ln n}$ est divergente.

On en conclut que $\boxed{\text{la série } \sum u_n \text{ n'est pas absolument convergente}}$.

g. Dans une boucle `while`, on caclcule la somme des termes $|u_k|$ jusqu'à ce qu'elle dépasse M :

```
def seuil(M):
    S = 0
    k = 2
    while S <= M:
        S = S + 1/(m.sqrt(k)*m.log(k))
        k += 1
    return k-1
```

2. On pose $v_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^2}$ pour tout entier $n \geqslant 2$.

a. On a vu à la question **1**. que la fonction h est strictement croissante sur $[2,+\infty[$.
Par composition avec la fonction carrée qui est elle-même croissante sur $\mathbb{R}^+$, la fonction $t \mapsto (h(t))^2$ l'est également.
On en déduit que : $\forall t \in [k-1,k],\ (h(t))^2 \leqslant (h(k))^2$ et donc $\dfrac{1}{k(\ln k)^2} \leqslant \dfrac{1}{t(\ln t)^2}$.

En intégrant sur l'intervalle $[k-1,k]$, on obtient : $\boxed{\forall k \geqslant 3,\ \dfrac{1}{k(\ln k)^2} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \dfrac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^2}}$.

b. On pose $T_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} v_k$ la somme partielle associée à la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} v_n$.
En sommant de part et d'autre de l'inégalité obtenue en **a.**, on obtient :
$\forall n \geqslant 2,\ \displaystyle\sum_{k=3}^{n} \dfrac{1}{k(\ln k)^2} \leqslant \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} \dfrac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^2}$ d'où $T_n \leqslant \dfrac{1}{2(\ln 2)^2} + \displaystyle\int_2^n \dfrac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^2}$.

Comme, en posant le changement de variable $u = \ln t$, $\displaystyle\int_2^n \dfrac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^2} = \int_{\ln 2}^{\ln n} \dfrac{\mathrm{d}u}{u^2} = \left[-\dfrac{1}{u}\right]_{\ln 2}^{\ln n}$,

on obtient que : $\forall n \geqslant 2,\ T_n \leqslant \dfrac{1}{\ln 2} - \dfrac{1}{\ln n}$ et donc $\forall n \geqslant 2,\ T_n \leqslant \dfrac{1}{\ln 2}$.
Comme $\forall n \geqslant 2,\ v_n > 0$, la suite $(T_n)_{n\geqslant 2}$ est croissante et majorée donc convergente.

On peut alors conclure que $\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_{n\geqslant 2} v_n \text{ est convergente}}$.