

Semaine 10
du lundi 4 au vendredi 8 décembre 2023

Espaces vectoriels

Structure d'espace vectoriel ($\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^I$ ou $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ où I est un intervalle, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$)

Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs

Sous-espaces vectoriels

Intersection d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels

Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs. Notation $\text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_k)$

Famille génératrice finie d'un espace vectoriel (sous réserve d'existence)

Famille libre finie. Famille liée finie

Exemple fondamental de famille libre : toute famille finie de polynômes de degrés deux à deux distincts est libre

Base finie d'un sous-espace vectoriel (sous réserve d'existence)

Coordonnées d'un vecteur dans une base

Matrice des coordonnées d'une famille finie de vecteurs dans une base

Base canonique de \mathbb{K}^n et $\mathbb{K}_n[X]$

De toute famille génératrice finie d'un espace vectoriel E , on peut extraire une base

Toutes les bases de E ont le même cardinal

Dimension d'un espace vectoriel E

Dans un espace vectoriel de dimension n :

toute famille libre a au plus n éléments

toute famille libre ayant n éléments est une base

toute famille génératrice a au moins n éléments

une famille génératrice ayant n éléments est une base

Si F est un sous-espace vectoriel de d'un espace vectoriel E de dimension finie alors :

F est de dimension finie

$\dim F \leq \dim E$

$F = E \Leftrightarrow \dim F = \dim E$

Rang d'une famille finie de vecteurs

Séries de nombres réels

Notation $\sum_{n \geq n_0} u_n$ ou $\sum u_n$, sommes partielles $S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k$

Convergence d'une série, somme d'une série convergente $S = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$

Combinaison linéaire de séries convergentes

Théorème de convergence par comparaison pour deux séries à termes positifs

Si les suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature

Convergence absolue (condition suffisante de convergence)

Si une série est absolument convergente alors elle est convergente

Convergence et somme de la série géométrique $\sum_{n \geq 0} q^n$ (pour $|q| < 1$)

Convergence et somme de la série géométrique dérivée première $\sum_{n \geq 1} nq^{n-1}$

Convergence et somme de la série géométrique dérivée seconde $\sum_{n \geq 2} n(n-1)q^{n-2}$

Convergence et somme de la série exponentielle $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$

Convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ et divergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$

Questions de cours

Définition d'un sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E

Définition d'une base et de la dimension d'un espace vectoriel.

Définition du rang d'un système de vecteurs d'un espace vectoriel.

Définition d'une famille libre (u_1, u_2, \dots, u_k) de vecteurs dans un espace vectoriel E .

Définition d'une famille génératrice dans un espace vectoriel E .

Caractérisation à l'aide du rang d'une famille libre d'une famille de p vecteurs de E de dimension n .

Caractérisation à l'aide du rang d'une famille génératrice d'une famille de p vecteurs de E de dimension n .

Caractérisation à l'aide du rang d'une base d'une famille de p vecteurs de E de dimension n .

Convergence et somme d'une série

Condition nécessaire de convergence de la série $\sum u_n$

Critère de convergence par comparaison d'une série à termes positifs

définition de la convergence absolue, critère de convergence et inégalité sur les sommes

définition et convergence d'une série télescopique

définition et convergence de la série harmonique

définition et convergence d'une série exponentielle

Condition de convergence et somme des séries suivantes : $\sum q^n$, $\sum nq^{n-1}$ et $\sum n(n-1)q^{n-2}$