Exercice 1

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Dans l'espace vectoriel $E_n = \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, on considère les ensembles :

$$\mathscr{S}_n = \left\{A \in E_n \quad A^\mathsf{T} = A\right\} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{A}_n = \left\{A \in E_n \quad A^\mathsf{T} = -A\right\}.$$

On rappelle que pour toute matrice M, M^T désigne sa matrice transposée.

1. Montrer que $\mathscr{S}_n$ et $\mathscr{A}_n$ sont des espaces vectoriels.
2. Donner une base $\mathscr{B}_S$ de $\mathscr{S}_2$, et calculer la dimension de $\mathscr{S}_2$,.
3. Donner une base $\mathscr{B}_A$ de $\mathscr{A}_2$, et calculer la dimension de $\mathscr{A}_2$.
4. Vérifier que la juxtaposition des bases $\mathscr{B}_S$ et $\mathscr{B}_A$ de forme une base de E_2.
5. En déduire que toute matrice M de E_2 s'écrit de façon unique comme la somme d'une matrice S de $\mathscr{S}_2$ et d'une matrice A de $\mathscr{A}_2$.

Exercice 2

Soit $d \in \mathbf{N}$. On appelle moment d'ordre d de la série exponentielle le réel m_d égal, sous réserve d'existence, à la somme de la série de terme général $\dfrac{n^d}{n!}$ $(n \geq 0)$: $m_d = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^d}{n!}$.

On prouve l'existence de m_d par deux méthodes et on propose un moyen de le calculer.

1. **a)** Soit n et d deux entiers naurels. En remarquant que : $n! = (n-d)! \times [n(n-1) \times \cdots \times (n-d+1)]$, montrer que :
$$\frac{n^d}{n!} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{(n-d)!}.$$
   b) Conclure quant à l'existence de m_d pour tout entier $d \geq 0$.

Soit $d \geq 2$ un entier fixé, et $\mathbf{R}_d[X]$ le sous-espace vectoriel des polynômes de degré au plus d. On notera $\mathscr{B}_d$ la base canonique de $\mathbf{R}_d[X]$. On introduit la famille de polynômes $\mathscr{B}' = (P_0, P_1, \ldots, P_d)$ définie par :

$$\forall k \in \{0 \ldots d\} \qquad P_k = \prod_{j=0}^{k-1}(X-j) = X(X-1)\ldots(X-k+1).$$

Ainsi : $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = X(X-1)$, *etc.*

2. **a)** Montrer que la famille $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbf{R}_d[X]$.
   b) En déduire qu' il existe $d+1$ scalaires notés $\alpha_0, \ldots, \alpha_d$ *qu'on ne cherchera pas à calculer* tels que :
$$X^d = \alpha_0 P_0 + \cdots + \alpha_d P_d.$$
3. Quel lien existe-t-il entre la matrice colonne $\begin{pmatrix}\alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_d\end{pmatrix}$ et la matrice de passage Π_d de $\mathscr{B}_d$ à $\mathscr{B}'$?
4. **a)** Soit $k \in \{0 \ldots d\}$. Simplifier, pour tout entier naturel n, le quotient $\dfrac{P_k(n)}{n!}$.
   On distinguera les cas $n < k$ et $n \geq k$.
   b) En déduire l'existence de m_d et donner son expression en fonction des scalaires α_j $(0 \leq j \leq d)$.

Exercice 3

Soit a, b étant deux réels dans $]0,1[$. On dispose de deux pièces A et B dont les probabilités de donner `Pile` sont respectivement a et b. On jeu au joue au jeu suivant :

i) On choisit une des deux pièces au hasard.

ii) On lance la pièce retenue. Ensuite :
   - Si on obtient `Face` : on change de pièce.
   - Si on obtient `Pile` : on conserve la pièce.

iii) On recommence l'étape ii) indéfiniment.

Pour tout entier $n \geq 1$, on définit les évènements :
A_n : «on joue avec la pièce A au n-ième lancer». On note $a_n = P(A_n)$.
B_n : «on joue avec la pièce B au n-ième lancer».
F_n : «le n-ème lancer de pièce donne `Face`».
E_n : «on obtient `Face` pour la première fois au n-ème lancer».
L_n : «les n premiers lancers sont effectués avec la même pièce».

1. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Après avoir exprimé L_n à l'aide des évènements A_k et B_k, calculer la probabilité $P(L_n)$.

2. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$.

a) À l'aide de la formule des probabilités totales, établir une relation de récurrence entre a_{n+1} et a_n.

b) Déterminer, pour tout entier $n \geq 1$, l'expression de a_n en fonction de n.

3. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$.

a) Calculer les probablités $P_{A_1}(E_n)$ et $P_{B_1}(E_n)$.

b) En déduire la valeur $P(E_n)$ pour tout entier $n \in \mathbf{N}^\star$.

c) Justifier que la série $\sum_{n\geq 1} P(E_n)$ converge et calculer sa somme.

d) Comment qualifier la famille d'évènements $(E_n)_{n\geq 1}$?