Semaine 12
du lundi 18 au vendredi 22 décembre 2024

Probabilités discrètes

Expérience aléatoire, univers Ω, événements, événement certain, événement impossible
Notion de tribu $\mathcal{T}$ sur Ω (aucune question sur les tribus ne doit être proposée)
Événements incompatibles, système complet d'événements
Système quasi-complet d'événements
Définition d'une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$
Propriétés d'une probabilité ($P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, $P(\emptyset) = 0$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$)
Pour des suites $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements 2 à 2 incompatibles, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} P(B_n)$ converge et

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B_n)$$

Cas d'équiprobabilité, probabilité uniforme
Définition de la probabilité conditionnelle, notation $P_A(B)$ ou $P\big(B \setminus A\big)$, P_A est une probabilité
Formule des probabilités composées (conditionnements successifs)
Formule des probabilités totales, si $(A_n)_n$ est un système complet ou quasi-complet d'événements alors la série $\sum P(A_n \cap B)$ est convergente de somme égale à $P(B) = \sum\limits_n P(A_n \cap B)$. Si, de plus, $\forall n$, $P(A_n) \neq 0$ alors la série $\sum P(A_n)P_{A_n}(B)$ est convergente de somme égale à $P(B) = \sum\limits_n P(A_n)P_{A_n}(B)$
Formule de Bayes
Indépendance de deux événements, indépendance (mutuelle) de n événements, d'une suite d'événements

Diagonalisation des matrices

Changement de base, matrice de passage, action d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur
Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres d'une matrice carrée
Les valeurs propres d'une matrice diagonale sont ses éléments diagonaux
Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre
Une famille obtenue par juxtaposition des bases des sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est libre
Une matrice carrée $n \times n$ admet au plus n valeurs propres distinctes et la somme des dimensions des sous-espaces propres est inférieure ou égale à n
Matrice diagonalisable
Une matrice carrée $n \times n$ est diagonalisable ssi la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à n
Une matrice carrée $n \times n$ ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable et les sous-espaces propres sont de dimension 1
Calcul des puissances d'une matrice
Application à l'étude de suites imbriquées, de suites récurrentes linéaires
Application à la résolution de systèmes différentiels linéaires
Application à la résolution d'équation matricielle

Questions de cours

Définition d'une probabilité sur un univers Ω
Définition de probabilité conditionnelle
Définition de l'indépendance de n événements

Formule des probabilités composées
Formule des probabilités totales
Formule de Bayes

Définition de la matrice de passage d'une base à une autre base d'un espace vectoriel de dimension finie
Action d'un changement de base sur la matrice des coordonnées d'un vecteur
Que peut-on dire d'une famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes ?
Que peut-on dire de la juxtaposition de bases de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes ?
Définition d'une valeur propre ainsi que d'un sous-espace propre pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
Définition d'une matrice diagonalisable
Condition sur les dimensions des sous-espaces propres pour qu'une matrice $n \times n$ soit diagonalisable
Condition suffisante de diagonalisabilité d'une matrice $n \times n$ quant au nombre de ses valeurs propres
Donner une condition d'inversibilité d'une matrice à l'aide de ses valeurs propres
Donner deux conditions suffisantes et non nécéssaires de diagonalisabilité d'une matrice carrée réelle.