Diagonalisation des matrices carrées

I Rappels sur le changement de bases page 2

1. Matrice de passage
2. Action d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur

II Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice carrée

1. Éléments propres d'une matrice
2. Matrice diagonalisable page 3
3. Méthode pratique de la diagonalisation des matrices page 4
4. Deux astuces pour le calcul des valeurs propres d'une matrice

III Application de la diagonalisation page 5

1. Puissances d'une matrice
2. Applications aux suites page 6
3. Équations matricielles
4. Systèmes différentiels page 7

I Rappels sur le changement de bases

1. Matrice de passage

Définition 1 Soit E un espace vectoriel et $B = (u_1, \ldots, u_n)$ une base de E.
Soit $\mathcal{F} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ une famille de n vecteurs de E.
On pose que : $\forall j \in \{1, \cdots, n\},\ v_j = p_{1j}u_1 + \cdots + p_{nj}u_n = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}u_i$
Soit $P = (p_{ij})_{i\in\{1,\cdots,n\},j\in\{1,\cdots,n\}}$ la matrice carrée d'ordre n dont la j-ème colonne est constituée des coordonnées du vecteur v_j de $\mathcal{F}$ dans la base B, pour tout j de $\{1, \cdots, n\}$.
Alors $\mathcal{F}$ est une base de E $\Leftrightarrow$ $rg(\mathcal{F}) = n \Leftrightarrow P$ est inversible.
Dans ce cas, P est appelée la matrice de passage de la base B à la base $\mathcal{F}$.

2. Action d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur

Proposition 1 Avec les mêmes notations, si B et $\mathcal{F}$ sont deux bases de E alors
-P est inversible (car $rg(u_1, \ldots, u_n) = rg(v_1, \ldots, v_n) = n$)
-$\forall u \in E,\ u = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i v_i$
Soit $X = {}^t(x_1, \cdots, x_n)$ la matrice colonne des coordonnées de u dans la base B
Soit $X' =^t (x_1, \cdots, x_n)$ la matrice colonne des coordonnées de u dans la base $\mathcal{F}$
alors $X = PX' \Leftrightarrow X' = P^{-1}X$.

II Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice carrée

1. Éléments propres d'une matrice

Définition 2 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
On dit que λ est valeur propre de A s'il existe une matrice colonne non nulle X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telle que $AX = \lambda X$.
Un vecteur de $\mathbb{K}^n$ dont la matrice colonne X des coordonnées vérifie $AX = \lambda X$ est alors appelé un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ et l'espace vectoriel
$E_\lambda = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid (A - \lambda I_n)X = O_n\}$ est appelé le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ.
L'ensemble des valeurs propres de A est appelé le spectre de A et noté $Sp(A)$ ou $Spec(A)$.

Proposition 2 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
$\lambda \in Spec(A) \Leftrightarrow A - \lambda I_n$ n'est pas inversible $\Leftrightarrow rg(A - \lambda I_n) < n$.
En particulier A n'est pas inversible si, et seulement si, 0 est valeur propre de A.

Preuve à faire en exercice

Exercice 1 Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer les éléments propres de A.

Proposition 3 Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux.

Preuve Si A est triangulaire alors $A - \lambda I_n$ est triangulaire et $rg(A - \lambda I_n)$ est égal au nombre d'éléments diagonaux non nuls de $A - \lambda I_n$.

2. Matrice diagonalisable

Remarque Une matrice carrée d'ordre n admet au plus n valeurs propres disctinctes et la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est inférieure ou égale à n.

Définition 3 Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite diagonalisable si, et seulement s'il existe une base de $\mathbb{K}^n$ constituée de vecteurs propres de A.

Proposition 4 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
A est diagonalisable si, et seulement s'il existe une matrice carrée inversible P et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AP = PD$.
Dans ce cas, on dit A et D sont semblables. On a alors $A = PDP^{-1}$ et $D = P^{-1}AP$.

Preuve Pour toute matrice M, on note $C_j(M)$ la j-ième colonne de M.
Soit $E_1, \cdots, E_n$ les n matrices des coordonnées des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
On remarque que : $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $ME_j = C_j(M)$
A est diagonalisable $\Leftrightarrow$ il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$ constituée de vecteurs propres de A.
Soit $X_1, \cdots, , X_n$ les n matrices des coordonnées des vecteurs de la base $\mathcal{B}$,
$\lambda_1, \cdots, , \lambda_n$ les n valeurs propres associées et D la matrice $diag(\lambda_1, \cdots, , \lambda_n)$.
Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ à $\mathcal{B}$.
P est inversible car $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{K}^n$ et $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $PE_j = X_j$.
Par définition, $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $AX_j = \lambda_j X_j$ donc $APE_j = \lambda_j PE_j = (P\lambda_j I_n)E_j$.
On en déduit que : $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $C_j(AP) = C_j(PD)$ et donc $AP = PD$.

Conséquences importantes

(1) Une matrice carrée d'ordre n est diagonalisable si, et seulement si, la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à n.
(2) Une matrice carrée d'ordre n qui admet n valeurs propres distinctes est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont tous de dimension 1.
(3) La juxtaposition des bases des sous-espaces propres est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Exercice 2 Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 3 Co-diagonalisation. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ telles que $AB = BA$.
On suppose que A admet n valeurs propres distinctes.
Montrer que tout vecteur propre de A est aussi vecteur propre de B.
En déduire que : $\exists P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient diagonales.

Proposition 5 Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable (et n'a que des valeurs propres réelles).
Autrement dit, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tA = A$ alors A est semblable à une matrice diagonale $diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ où $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$.

Preuve Résultat admis

Exemple qui illustre le fait que les coefficients de A doivent être réels : $A = \begin{pmatrix} 1-2i & 2 \\ 2 & 1+2i \end{pmatrix}$.
A est symétrique et pourtant A n'est pas diagonalisable car la seule valeur propre de A est 1 et le sous-espace propre associé est de dimension 1.

3. Méthode pratique de la diagonalisation des matrices

a. La méthode générale pour diagonaliser une matrice A consiste à

• déterminer le spectre de A.

Pour cela, on écrit que λ est valeur propre de A si, et seulement si, $A - \lambda I$ n'est pas inversible.
On utilise la méthode du pivot de Gauss pour échelonner la matrice $A - \lambda I$
puis on trouve les valeurs de λ pour lesquelles $rg(A - \lambda I) < n$
On obtient $Sp(A) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_p\}$.

• Pour tout k de $[\![1, p]\!]$,
on recherche une base $\mathcal{B}_k$ du sous-espace propre E_{λ_k} associé à la valeur propre λ_k.
La juxtaposition, $\mathcal{B} = \bigcup_{k=1}^{p} \mathcal{B}_k$, de ces bases est une famille libre de $\mathbb{K}^n$.
Si $card\mathcal{B} = n$ alors $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{K}^n$ et A est diagonalisable.

• On pose P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ à $\mathcal{B}$,
$D = P^{-1}AP$ est la matrice diagonale dont les coefficients sont les valeurs propres de A dans l'ordre correspondant aux vecteurs de $\mathcal{B}$.

Exercice 4 Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et déterminer la matrice P qui diagonalise A.

b. Cas particulier de la dimension 2 :

Un matrice carrée d'ordre 2 est inversible si, et seulement si, son déterminant est non nul.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a alors $\lambda \in Sp(A) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0$

Les valeurs propres de A sont donc les racines du trinôme $(a-\lambda)(d-\lambda) - bc = 0$.

Exercice 5 Déterminer les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. A est-elle diagonalisable ?

4. Deux astuces pour le calcul des valeurs propres d'une matrice

a. Cas des matrices stochastiques (très utiles en probas)

Soit $A = (a_{ij})_{(i,j)\in[1,n]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si $\exists s \in \mathbb{K} \mid \forall i \in [\![1, n]\!], \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = s$ alors, en posant $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, $AX = sX$.

On en déduit que s est valeur propre de A et X est vecteur propre de A associé à s.

On admet que A et ${}^tA$ ont les mêmes valeurs propres, donc si $\exists s \in \mathbb{K} \mid \forall j \in [\![1, n]\!], \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = s$ alors s est aussi valeur propre de A mais on n'a pas de vecteurs propres associés.

Exercice 6 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. A est-elle diagonalisable ?

b. Utilisation d'un polynôme annulateur *(Résultat hors programme mais la méthode est à connaître).*
Il faut refaire en entier à chaque fois qu'on l'utilise.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k$ un polynôme tel que $P(A) = 0$: $\sum_{k=0}^{p} a_k A^k = 0$.
P est appelé polynôme annulateur de A.
si $\lambda \in spec(A)$ alors $\exists X \neq 0 \mid AX = \lambda X$ donc, par récurrence évidente, $\forall k \in [\![0, p]\!]$, $A^k X = \lambda^k X$.
On obtient alors que $\sum_{k=0}^{p} a_k A^k X = \left(\sum_{k=0}^{p} a_k \lambda^k\right) X$. Comme $X \neq 0$, $P(A) = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{p} a_k \lambda^k$.
On obtient finalement que si λ est valeur propre de A alors $P(\lambda) = 0$.
Autrement dit, les valeurs propres de A sont à chercher parmi les racines de P.

En particulier, si A est nilpotente alors 0 est l'unique valeur propre de A

Exercice 7 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^3 - 2A^2 - A + 2I_3 = 0$.
Vérifier que les valeurs propres de A sont racine du polynôme $P = X^3 - 2X^2 - X + 2$.

III Application de la diagonalisation

1. Puissances d'une matrice

Il existe plusieurs méthodes pour calculer les puissances successives d'une matrice.
L'une d'elles consiste à utiliser une matrice semblable diagonale :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ une matrice diagonale semblable à A.
Soit P la matrice carrée inversible telle que $A = PDP^{-1}$
alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1} = P\,\text{diag}(\lambda_1^k, \cdots, \lambda_n^k)P^{-1}$.

Exercice 8 Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer A^k pour tout k de $\mathbb{N}$.

2. Applications aux suites

a. Suites récurrentes croisées

On considère des suites définies par leur premier terme et une relation de dépendance linéaire entre les termes de rang $n+1$ et les termes de rang n.
On note U_n la matrice colonne des termes de rang n alors il existe une matrice carrée A telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$.
On montre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n U_0$.
(Attention à ne pas écrire $U_0 A^n$ qui n'a aucun sens !)
Il suffit donc de connaître A^n pour exprimer les termes généraux des suites en fonction de n et de leurs premiers termes.

Exercice 9 Soit (u_n) et (v_n) définies par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ v_0 = 1 \end{cases}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - 4v_n \\ v_{n+1} = -2u_n + v_n \end{cases}$.
On pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice A telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$.
Déterminer u_n et v_n en fonction de n.

b. Suites récurrentes linéaires

On considère une suite (u_n) définie par ses p premiers termes
et une relation de récurrence linéaire entre $p+1$ termes consécutifs.
On pose U_n la matrice colonne de p termes consécutifs $u_n, u_{n+1}, \cdots, u_{n+p-1}$ de la suite.
On explicite une matrice carrée A d'ordre p telle que $U_{n+1} = AU_n$.
On en déduit par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = A^n U_0$.
On détermine A^n par exemple, en la diagonalisant.
Enfin, on calcule $U_n = A^n U_0$ pour exprimer u_n en fonction de n et des p premiers termes.

Exercice 10 Soit (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 1 \\ u_2 = 1 \end{cases}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$

Déterminer le terme général u_n en fonction de n.

3. Équations matricielles

Soit (E) une équation d'inconnue une matrice M et qui dépend d'une matrice A.
Si A est diagonalisable alors on montre que M et A sont co-diagonalisable.
Puis, si A est semblable à une matrice diagonale D
alors on déduit de (E) une équation équivalente (E') qui dépend de D.
On résout l'équation (E') et on déduit les solutions de (E) de celles de (E').

Exercice 11 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Résoudre l'équation dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ l'équation $M^2 = A$.

4. Systèmes différentiels

On cherche n fonctions $x_1, \cdots, x_n$ continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ solutions d'un système d'équations différentielles linéaires du premier ordre de telle sorte que ce système puisse s'écrire sous la forme :

$X'(t) = AX(t)$ où $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$, $X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}$ et A est une matrice carré d'ordre n.

Si A est diagonalisable alors il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale
$D = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ telle que $D = P^{-1}AP$.
On peut alors écrire que : $X'(t) = AX(t) \Leftrightarrow P^{-1}X'(t) = DP^{-1}X(t)$.
On pose $Y(t) = P^{-1}X(t)$, comme la dérivation est linéaire, $Y'(t) = P^{-1}X'(t)$ et donc $Y'(t) = DY(t)$.
Comme D est diagonale, les n équations de ce système sont toutes des équations différentielles linéaires du premier ordre homogène et à coefficient constant, de la forme $y' = ay$. On obtient alors la matrice $Y(t)$.
Pour conclure, on calcule $X(t) = PY(t)$.
On remarquera qu'il est inutile de calculer P^{-1}.

Exercice 12 Résoudre dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})^3$ le système différentiel $\begin{cases} x'(t) = 3x(t) + y(t) + z(t) \\ y'(t) = x(t) + 3y(t) + z(t) \\ z'(t) = x(t) + y(t) + 3z(t) \end{cases}$.