# Variables aléatoires réelles discrètes

# I Loi d'une variable aléatoire réelle discrète

Dans tout le paragraphe, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

## 1. Rappels

**Définition 1** Une variable aléatoire réelle sur $\Omega$ est une application $X$ de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$.
Le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ : $X(\Omega) = \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\}$ est appelé l'univers image.

**Notation** Soit $X$ une variable aléatoire réelle sur $\Omega$, les événements liés à $X$ sont :
$[X = x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$, $[X < x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x\}$
$[X > x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > x\}$, $[X \leqslant x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant x\}$
$[X \geqslant x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geqslant x\}$, $[a \leqslant X < b] = \{\omega \in \Omega \mid a \leqslant X(\omega) < b\}$

**Définition 2** Une vatriable aléatoire réelle $X$ est discrète
si $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$, $X$ est alors une variable aléatoire réelle discrète finie.
ou si $X(\Omega) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $X$ est alors une variable aléatoire discrète infinie dénombrable.

**Proposition 1** Soit $X$ une variable aléatoire réelle discrète d'univers image $X(\Omega)$
Alors la famille $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements.

**Proposition 2** • L'ensemble des variables aléatoires réelles discrètes sur $\Omega$ est un espace vectoriel
• pour toute application $f$ de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$, l'application composée $f \circ X : \omega \mapsto f(X(\omega))$ est une variable aléatoire réelle discrète sur $\Omega$, on la note $f(X)$.

## 2. Loi d'une variable aléatoire réelle discrète

**Définition 3** Soit $X$ une variable aléatoire réelle discrète sur $\Omega$.
La loi de probabilité ou distribution de $X$ est l'application : $\begin{array}{ccc} X(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & P(X = x) \end{array}$.

Déterminer la loi de $X$ revient donc à
-déterminer l'univers image $X(\Omega)$ des valeurs prises par $X$
-calculer, pour tout $x$ de $X(\Omega)$, la valeur de la probabilité $P(X = x)$.

**Proposition 3** Soit $X$ une vatriable aléatoire réelle discrète d'univers image $X(\Omega)$
• Si $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$ alors $\sum_{k=1}^{n} P(X = x_k) = 1$
• Si $X(\Omega) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ alors la série $\sum P(X = x_k)$ est convergente et $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = x_k) = 1$.
Pour tout sous-ensemble $A$ de $\mathbb{R}$, $P(X \in A) = \sum_{x \in A \cap X(\Omega)} P(X = x)$.

**Proposition 4** Soit $X$ une variable aléatoire réelle discrète d'univers image $X(\Omega) = \{x_n \mid n \in \mathbb{I}\}$.
Soit $f$ une application définie de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ et $Y = f(X)$.

Alors la loi de $Y$ est donnée par : $\begin{cases} Y(\Omega) = \{f(x_n) \mid n \in \mathbb{N}\} \\ \forall y \in Y(\Omega),\ P(Y = y) = \displaystyle\sum_{x_n \in X(\Omega) \mid f(x_n) = y} P(X = x_n) \end{cases}$.

**Proposition 5** Caractérisation des lois de variables aléatoires réelles discrètes

•Soit $E = \{x_1, \cdots, x_n\}$ un ensemble de $n$ nombres réels et $p_1, \cdots, p_n$ $n$ nombres réels.
Il existe une variable $X$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que $X(\Omega) = E$ et $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $P(X = x_k) = p_k$ si, et seulement si : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $p_k \geqslant 0$ et $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$

•Soit $E = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ un ensemble dénombrable de réels et $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.
Il existe une variable $X$ sur $(\Omega, \mathcal{T})$ tels que $X(\Omega) = E$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(X = x_n) = p_n$ si, et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n \geqslant 0$ et la série $\sum p_n$ est convergente de somme $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$.

## 3. Lois discrètes usuelles

Soit $X$ une variable aléatoire discrète définie sur un univers $\Omega$.

### a. La loi certaine

**Définition 4** $X$ est certaine s'il existe un réel $c$ tel que : $X(\Omega) = \{c\}$.
Dans ce cas, $P(X = c) = 1$ et $\forall x \neq c,\ P(X = x) = 0$.

### b. La loi uniforme permet de traduire l'expression "au hasard"

**Définition 5** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $F = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un ensemble de $n$ réels.
$X$ suit la loi uniforme sur $F$ si $X(\Omega) = F$ et $\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ P(X = x_i) = \frac{1}{n}$.
Cas particulier :
Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2,\ a < b,\ F = [\![a, b]\!]$ et $\forall k \in [\![a, b]\!],\ P(X = k) = \dfrac{1}{b - a + 1}$ $\in$. On note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a, b]\!])$

### c. La loi de Bernoulli est celle d'une expérience ayant deux issues

**Définition 6** Soit $p \in [0, 1]$.
$X$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $p$, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, si $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et $P(X = 1) = p$.

### d. La loi binomiale (ou loi des tirages avec remise) compte le nombre de succès lors de la répétion de $n$ expériences de Bernoulli de même paramètre (donc indépendantes).

**Définition 7** Soit $p \in [0, 1]$ et $X_1, \cdots, X_n$ $n$ variables indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p)$.
$X$ suit la loi binomiale de paramètres $n$ et $p$, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, si, et seulement si, $X = \sum_{i=0}^{n} X_i$.
On a alors $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et $\forall k \in [\![0, n]\!],\ P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.

### e. La loi géométrique

Soit une expérience de Bernoulli de probabilité de succès égale à $p$.
On répète une infinité de fois l'expérience dans des conditions identiques ($p$ est constant).
Soit $X$ le rang du premier succès au cours de ces $n$ épreuves.
$X$ prend les valeurs $1, 2, \ldots$ et pour tout $k$ de $\mathbb{N}^*$, $X = k$ si, et seulement si, les $k - 1$ premières épreuves sont un échec et la $k$-ième est un succès.
Par indépendance, $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p$.

**Définition 8** Soit $p \in ]0,1[$. $X$ suit la loi géométrique de paramètre $p$, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, si, et seulement si, $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = k) = (1-p)^{k-1}p$.

**Remarque** Soit $p \in ]0,1]$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $(1-p)^{k-1}p \geqslant 0$, la série géométrique $\sum (1-p)^{k-1}$ est convergente et $\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{k-1}p = \sum_{k=0}^{+\infty}(1-p)^k p = p\dfrac{1}{1-(1-p)} = 1$.

### f. La loi de Poisson (ou loi des événements rares)

Soit $\mu > 0$, $E = \mathbb{N}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n = \dfrac{\mu^n}{n!}e^{-\mu}$. On a bien $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\mu^n}{n!}e^{-\mu} \geqslant 0$.

On reconnait une série exponentielle, donc la série $\sum \dfrac{\mu^n}{n!}$ est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\mu^n}{n!}e^{-\mu} = 1$.

Ainsi il existe une variable aléatoire $X$ telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = \dfrac{\mu^n}{n!}e^{-\mu}$.

**Définition 9** Soit $\mu > 0$.
On dit qu'une variable aléatoire $X$ suit la loi Poisson de paramètre $\mu$,
et on note $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$, si, et seulement si, $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = \dfrac{\mu^n}{n!}e^{-\mu}$.

**Exercice 1** (1)Soit une expérience de Bernoulli de probabilité de succès égale à $p$.
Soit $X$ le rang du premier succès au cours de ces épreuves et $Y$ le nombre d'échecs avant le premier succès. Déterminer les lois de $X$ et $Y$.
(2)Dans une urne contenant une infinité de boules numérotées sur $\mathbb{Z}$, on tire au hasard une boule. La probabilité que la boule tirée soit numérotée $k$ est $p_k = \dfrac{1}{2.3^{|k|}}$.
Soit $X$ la variable égale au n° de la boule tirée et $Y = X^2$. Vérifier que l'on définit bien une loi de probabilité pour $X$ et déterminer la loi de probabilité de $Y$.

## 4. Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et $X$ une variable aléatoire réelle discrète sur $\Omega$.

**Définition 10** La fonction de répartition de $X$, est l'application définie sur $\mathbb{R}$ par : $F_X : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & P(X \leqslant x) \end{array} \right.$.

**Proposition 6** Soit $F_X$ la fonction de répartition de $X$ alors
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) \in [0,1]$
- $F_X$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$
- $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$

**Preuve** •Pour tout $x$ réel, $F_X(x) = P(X \leqslant x) \in [0,1]$
•Pour tous $x$ et $y$ réels tels que $x \leqslant y$ alors $]-\infty, x] \subset ]-\infty, y]$ donc $[X \leqslant x] \subset [X \leqslant y]$ et $P(X \leqslant x) \leqslant P(X \leqslant y)$. On a alors $x \leqslant y \Rightarrow F_X(x) \leqslant F_X(y)$ et $F_X$ est croissante.
• $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = \lim_{n\to+\infty} F_X(-n) = \lim_{n\to+\infty} P(X \leqslant -n) = 0$.
• $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = \lim_{n\to+\infty} F_X(n) = \lim_{n\to+\infty} P(X \leqslant n) = 1 - \lim_{n\to+\infty} P(X > n) = 1$.

**Exercice 2** Soit $X$ une variable aléatoire de loi : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$.
Vérifier que cela définit bien une loi de probabilité et déterminer la fonction de répartition de $X$.

**Proposition 7** Soit $F_X$ la fonction de répartition de $X$ alors

• $F_X$ est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$ ($\forall x \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{t\to x^+} F_X(t) = F_X(x)$)

• $\forall x \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{t\to x^-} F_X(t) = F_X(x) - P(X = x) = P(X < x)$.

Proposition admise.

**Conséquence** Pour tout réel $a$, $F_X$ est continue en $a$ si, et seulement si, $P(X = a) = 0$.

**Remarque** Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires réelles discrètes sur le même $\Omega$.
On dit que $X$ et $Y$ ont même loi si $X(\Omega) = Y(\Omega)$ et $\forall x \in X(\Omega),\ P(X = x) = P(Y = x)$.
Mais cela ne signifie pas que les deux variables aléatoires $X$ et $Y$ sont égales.

**Exemple** On lance deux fois une pièce de monnaie bien équilibrée. Soit $X$ le nombre de pile et $Y$ le nombre de face.
$X(\Omega) = Y(\Omega) = \{0, 1, 2\}$
et $P(X = 0) = P(Y = 0) = \dfrac{1}{4}$, $P(X = 1) = P(Y = 1) = \dfrac{1}{2}$, $P(X = 2) = P(Y = 2) = \dfrac{1}{4}$.
$X$ et $Y$ ont même loi mais on n'a pas $X = Y$ en effet, $X(F, F) = 0$ et $Y(F, F) = 2$ par ex.

**Remarque** On admettra que si deux variables aléatoires réelles discrètes ont même fonction de répartition alors elles ont même loi. D'où l'intérêt de pouvoir déterminer la loi de probabilité losque l'on connait la fonction de répartition.

**Proposition 8** Soit $X$ une variable aléatoire réelle discrète d'univers image $X(\Omega) = \{x_n \mid n \in \mathbb{I}\}$ alors
$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{I} \mid x_n \leqslant x} P(X = x_n)$
En particulier si $X(\Omega) \subset \mathbb{Z}$ alors $\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \sum\limits_{k\leqslant x} P(X = k)$ et $\forall k \in X(\Omega)$,
$P(X = k) = P(X \leqslant k) - P(X \leqslant k - 1)$

**Preuve** $\forall k \in X(\Omega),\ [X = k] = [k - 1 < X \leqslant k] = [X \leqslant k] \setminus [X \leqslant k - 1]$.
Comme $[X \leqslant k - 1] \subset [X \leqslant k]$, $P([X \leqslant k] \setminus [X \leqslant k - 1]) \ = P(X \leqslant k) - P(X \leqslant k - 1)$

**Remarque** •On peut aussi montrer que $P(X = k) = P(X > k - 1) - P(X > k)$
•Cette proposition est utile losqu'il est plus facile de calculer les probabilités des événements $[X \leqslant k]$ ou $[X > k]$ que celles de $[X = k]$.

**Exercice 3** Un sauteur en hauteur tente de franchir des barres situées à des hauteurs n° $1, 2, \ldots$
Il n'essaie de franchir la hauteur $n$ que s'il a réussi à passer les hauteurs précédentes.
La probabilité qu'il réussisse la hauteur $n$ sachant qu'il a réussi les $n - 1$ premières est égale à $\dfrac{1}{n}$.
Soit $X$ la variable aléatoire égale à la dernière hauteur tentée.
On pose $X = 0$ si toutes les hauteurs sont franchies avec succès.
Calculer $P(X > n)$ pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$ en déduire la loi de $X$.

**Proposition 9** Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ alors
•$\forall k \in \mathbb{N},\ P(X > k) = (1 - p)^k = q^k$.
•$\forall (k, \ell) \in \mathbb{N}^2,\ P(X > k + \ell) = P(X > k)P(X > \ell)$ donc $P_{X>k}(X > k + \ell) = P(X > \ell)$.

**Preuve** • $\forall k \in \mathbb{N},\ P(X > k) = \sum\limits_{i=k+1}^{+\infty} (1 - p)^{i-1}p = \sum\limits_{i=1}^{+\infty}(1 - p)^{i+k-1}p = (1 - p)^k \sum\limits_{i=1}^{+\infty}(1 - p)^{i-11}p = (1 - p)^k$
• $\forall (k, \ell) \in \mathbb{N}^2,\ P(X > k + \ell) = (1 - p)^{k+\ell} = (1 - p)^k(1 - p)^\ell = P(X > k)P(X > \ell)$.

## II Simulation Python des lois discrètes usuelles

Simuler sous Python une variable aléatoire $X$ c'est écrire une fonction qui renvoie une valeur aléatoire $n$ prise par $X$ avec la probabilité $P(X = n)$.

On a besoin du module `random` donc on écrit l'instruction `import random as rd`

1. **La loi uniforme** sur $[\![1,n]\!]$ où $n$ est un entier strictement positif.
   $X$ prend des valeurs aléatoires dans $[\![1,n]\!]$ donc on utilise la fonction `randint` du module `random`.
   Pour simuler une réalisation de $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$, on écrit la fonction :

```
def Uniforme(n):
    return rd.randint(1,n)
```

2. **La loi de Bernoulli de paramètre** $p$
   $X$ prend la valeur 1 avec la probabilité $p$ et 0 avec la probabilité $1-p$.
   On remarque qu'en choisissant au hasard un réel $u$ entre 0 et 1, $p$ est la probabilité que $u < p$.
   Pour simuler une réalisation de $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1,p)$, on écrit la fonction :

```
def Bernoulli(p):
    return rd.random() < p
```

3. **La loi binomiale de paramètres** $(n,p)$
   $X$ est le nombre de succès lors de la répétition de $n$ épreuves de Bernoulli de même paramètre $p$.
   On a aussi $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ où $X_1,\cdots,X_n$ sont $n$ variables de Bernoulli indépendantes de paramètre $p$.
   Pour simuler une réalisation de $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, on écrit l'une des deux fonctions :

```
def binomiale(n,p):
    s = 0
    for _ in range(n):
        if rd.random() < p:
            s += 1
    return s

def binomiale(n,p):
    return sum([rd.random() < p for _ in range(n)])
```

4. **La loi géométrique de paramètre** $p$
   $X$ est le rang du premier succès lors de répétitions d'épreuves de Bernoulli de même paramètre $p$.
   Pour simuler une réalisation de $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, on écrit la fonction :

```
def geometrique(p):
    rg = 1
    while rd.random() > p:
        rg += 1
    return rg
```

5. **La loi de Poisson de paramètre** $\mu$
   On pose $p_n = P(X = n)$, $p_0 = e^{-\mu}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \frac{\mu}{n} p_{n-1}$. On sait que $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$.
   En choisissant au hasard un réel $u$ entre 0 et 1, $p_n$ est la probabilité que $\sum_{k=0}^{n-1} p_k < u \leqslant \sum_{k=0}^{n} p_k$.
   Ainsi, on calcule la somme des $p_k$ et on renvoie le premier entier $n$ tel que $\sum_{k=0}^{n} p_k \geqslant u$.

Pour définir $p_0$, on a besoin de la fonction exponentielle (importée de `math` ou `numpy`).
Ainsi, pour simuler une réalisation de $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$, on écrit la fonction :

```
def Poisson(μ):
    u = rd.random()
    n, p = 0, exp(-μ)
    S = p
    while S < u:
        n += 1
        p *= μ/n
        S += p
    return n
```

# III Moments d'une variable aléatoire réelle discrète

Dans tout ce paragraphe, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

## 1. Moments

**Définition 11** Soit $X$ une variable aléatoire réelle d'univers image $X(\Omega)$ et $r \in \mathbb{N}^*$.

•Si $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$

Le moment d'ordre $r$ de $X$, noté $m_r(X)$, est $m_r(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k^r P(X = x_k)$.

•Si $X(\Omega) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

$X$ admet un moment d'ordre $r$ si, et seulement si, la série $\sum x_n^r P(X = x_n)$ est absolument convergente.

Dans ce cas, le moment d'ordre $r$ de $X$ ,noté $m_r(X)$, est la somme de la série :
$m_r(X) = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n^r P(X = x_n)$.

**Proposition 10** Si $X$ admet un moment d'ordre $r$ alors pour tout entier $s \leqslant r$, $X$ admet un moment d'ordre $s$.

**Preuve** $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_n|^s \leqslant |x_n|^r$ et $|x_n|^s P(X = x_n) \leqslant |x_n|^r P(X = x_n)$.
Comme la série de terme général $|x_n|^r P(X = x_n)$ est convergente, celle de terme général $|x_n|^s P(X = x_n)$ l'est aussi.

## 2. Espérance mathématique

**Définition 12** Soit $X$ une variable aléatoire réelle discrète infinie sur $\Omega$.

On appelle espérance mathématique de $X$, et on note $E(X)$, son moment d'ordre 1, s'il existe :

•Si $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$ alors l'espérance mathématique de $X$, notée $E(X)$, est
$E(X) = m_1(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k P(X = x_k)$.

•Si $X(\Omega) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ alors $X$ admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente,

Et dans ce cas, $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n)$.

**Exercice 4** Les variables aléatoires suivantes admettent-elles une espérance ? Si oui, la calculer :

(1) $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

(2) $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall n > 0$, $P(X = n) = \dfrac{n-1}{n!}$ et $P(X = 0) = 0$ (ex du sauteur en hauteur).

**Proposition 11** Espérance des lois usuelles :

• si $X$ est certaine égale à $c$ alors $E(X) = c$

• si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a,b]\!])$ alors $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$

• si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1,p)$ alors $E(X) = p$

• si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ alors $E(X) = np$

• Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ alors $X$ admet une espérance égale à $E(X) = \dfrac{1}{p}$.

• Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ alors $X$ admet une espérance égale à $E(X) = \mu$.

**Preuve** en exercice

**Proposition 12** Théorème de transfert :

soit $X$ une variable aléatoire réelle discrète d'univers image $X(\Omega)$ et $Y = f(X)$

Soit $f$ une application définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

• Si $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$ alors $E(Y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(x_k)P(X = x_k)$.

• Si $X(\Omega) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ alors $Y$ admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum f(x_n)P(X = x_n)$ est absolument convergente et dans ce cas, $E(Y) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f(x_n)P(X = x_n)$.

**Preuve** en exercice pour le cas fini, admis pour le cas infini dénombrable.

**Exercice 5** Dans une urne contenant une infinité de boules numérotées sur $\mathbb{Z}$, on tire au hasard une boule avec la probabilité $p_k = \dfrac{1}{2.3^{|k|}}$ que la boule numérotée $k$ soit tirée.

Soit $X$ la variable égale au n° de la boule tirée. Déterminer la loi de $X$.

Soit $Y = 2^X$ et $Z = 4^X$. Calculer, si elles existent, les espérances des variables $Y$ et $Z$.

**Définition 13** On dit que $X$ est <u>centrée</u> si, et seulement si, $E(X) = 0$

**Exercice 6** Dans une urne contenant une infinité de boules numérotées sur $\mathbb{Z}$, on tire au hasard une boule avec la probabilité que la boule numérotée $k$ soit $p_k = \dfrac{1}{2.3^{|k|}}$.

$X$ est la variable égale au n° de la boule tirée. Montrer que $X$ est centrée ($E(X) = 0$).

**Proposition 13** Linéarité, positivité et croissance de l'espérance.

•Si $X$ et $Y$ admettent des espérances alors $aX + bY$ admet une espérance et $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.

En particulier $E(aX + b) = aE(X) + b$

• si $X$ est positive, c'est-à-dire $\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) \geqslant 0$, alors $E(X)$ est un réel positif.

• si $X \leqslant Y$, c'est-à-dire $\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) \leqslant Y(\omega)$, alors $E(X) \leqslant E(Y)$.

## 3. Variance et écart-type

**Définition 14** Soit $X$ une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{T})$

Si $X$ admet une espérance et si $X - E(X)$ admet un moment d'ordre 2 alors la <u>variance</u> de $X$ est le nombre réel $V(X) = m_2(X - E(X)) = E((X - E(X))^2)$.

**Proposition 14** Formule de Kœnig-Huygens :

$X$ admet une variance si, et seulement si, $X$ admet un moment d'ordre 2.

Dans ce cas, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

**Preuve** •Si $X$ possède un moment d'ordre 2 alors $X$ possède également un moment d'ordre 1 donc une

espérance. Comme $(X - E(X))^2 = X^2 - 2E(X)X + E(X)^2$, par linéarité, $(X - E(X))^2$ possède une espérance donc $V(X)$ existe. De plus
$E((X - E(X))^2) = E(X^2 - 2E(X)X + E(X)^2) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$
•Réciproquement, si $X$ admet une variance, par définition, $X$ et $(X - E(X))^2$ admettent une espérance. Or $X^2 = (X - E(X))^2 + 2E(X)X - E(X)^2$ donc, par linéarité, $X^2$ admet une espérance et $X$ un moment d'ordre 2.

**Exercice 7** Dans une urne contenant une infinité de boules numérotées sur $\mathbb{Z}$, on tire au hasard une boule avec la probabilité que la boule numérotée $k$ soit $p_k = \dfrac{1}{2.3^{|k|}}$. Soit $X$ la variable égale au n° de la boule tirée. Montrer que $X$ admet une variance et la calculer.

**Proposition 15** Variance des lois usuelles :
• si $X$ est certaine égale à $c$ alors $V(X) = 0$
• si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1,p)$ alors $V(X) = p(1-p)$
• si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ alors $V(X) = np(1-p)$
• Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ alors $X$ admet une variance égale à $V(X) = \dfrac{1-p}{p^2} = \dfrac{q}{p^2}$.
• Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ alors $X$ admet une variance égale à $V(X) = \mu$.

Les variances des lois uniforme et hypergéométrique ne sont pas au programme

**Preuve** En exercice

**Proposition 16** Si $X$ admet une variance alors
•$V(X) \geqslant 0$
•$V(X) = 0 \Leftrightarrow X$ est presque sûrement certaine (c'est-à-dire : $\exists m \in \mathbb{R} \mid P(X = m) = 1$)

**Preuve** •Comme la variable $(X - E(X))^2$ est positive, son espérance aussi.

•Si $X$ est presque sûrement constante alors $E(X) = m$ et $E(X^2) = m^2$ donc $V(X) = 0$.
Réciproquement, si $V(X) = 0$ alors $V(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - E(X))^2 P(X = x) = 0$.
Comme tous les termes de cette somme sont positifs,

$$\sum_{x \in X(\Omega)} (x - E(X))^2 P(X = x) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in X(\Omega),\ (x - E(X))^2 P(X = x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \forall x \in X(\Omega),\ x = E(X) \text{ ou } P(X = x) = 0$$

En posant $m = E(X)$, on a bien si $x \neq m$ alors $P(X = x) = 0$ et donc $P(X = m) = 1$.

**Proposition 17** Si $X$ admet une variance alors :
$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $aX + b$ admet une variance et $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

**Preuve** en exercice

**Définition 15** Si $X$ admet une variance alors l'écart-type de $X$ est le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.
Si, de plus, $E(X) = 0$ et $\sigma(X) = 1$ alors $X$ est dite centrée réduite.

Si $X$ admet une variance et si $V(X) \neq 0$ alors
la variable centrée réduite associée à $X$ est la variable $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$
On a bien $E(X^*) = 0$ et $V(X) = 1$

# Tableau récapitulatif des lois discrètes usuelles

| NOM - NOTATION | LOI | ESPÉRANCE - VARIANCE | |
|---|---|---|---|
| **Loi uniforme**<br>$X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a,b]\!]), (a,b) \in \mathbb{N}^{*2}$<br>$X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!]), n \in \mathbb{N}^*$ | $X(\Omega) = [\![a,b]\!]$<br>$\forall k \in [\![a,b]\!], P(X=k) = \dfrac{1}{b-a+1}$<br>$\forall k \in [\![1,n]\!], P(X=k) = \dfrac{1}{n}$ | $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$<br>$E(X) = \dfrac{n+1}{2},\ V(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$ | |
| **Loi de Bernoulli**<br>$X \hookrightarrow \mathcal{B}(1,p)$,<br>$p \in [0,1]$ | $X(\Omega) = \{0,1\}$<br>$P(X=1) = p$<br>$P(X=0) = 1-p$ | $E(X) = p$<br>$V(X) = p(1-p)$ | |
| **Loi binomiale**<br>$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$,<br>$n \in \mathbb{N}^*, p \in [0,1]$ | $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$<br>$\forall k \in [\![0,n]\!]$,<br>$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ | $E(X) = np$<br>$V(X) = np(1-p)$ | I<br>de |
| **Loi géométrique**<br>$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$<br>$p \in ]0,1]$ | $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$<br>$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X=n) = (1-p)^{n-1}p$ | $E(X) = \dfrac{1}{p}$<br>$V(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$ | Ra<br>c |
| **Loi de Poisson**<br>$X \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$<br>$\mu > 0$ | $X(\Omega) = \mathbb{N}$<br>$\forall n \in \mathbb{N}, P(X=n) = \dfrac{\mu^n}{n!}e^{-\mu}$ | $E(X) = \mu$<br>$V(X) = \mu$ | |