Exercice 1

1. On montre que $\mathscr{S}_n$ et $\mathscr{A}_n$ sont des sous-espaces vectoriels de E_n. Faisons-le pour $\mathscr{S}_n$, c'est exactement la même chose pour $\mathscr{A}_n$. La matrice nulle est dans E_n car elle est égale à sa transposée. Si maintenant λ est un réel, et A et B deux éléments de E_n, par propriétés de la transposition : $(A+\lambda B)^{\mathsf{T}} = A^{\mathsf{T}} + \lambda B^{\mathsf{T}} = A + \lambda B$, car A et B sont dans $\mathscr{S}_n$. Ainsi, $\mathscr{S}_n$ est un espace vectoriel, tout comme $\mathscr{A}_n$.

2. Posons, pour toute matrice M de E_2, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, a, b, c, d étant quatre réels. On constate, par unicité des coefficients d'une matrice, que l'égalité $M = M^{\mathsf{T}}$ donne que : $\mathscr{S}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \quad (a, b, d) \in \mathbf{R}^3 \right\}$, c'est-à-dire, en posant $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, que $\mathscr{S}_2 = \mathrm{Vect}\,(J, K, L)$. Ceci montre que $\mathscr{B}_S = (J, K, L)$ est une famille génératrice de $\mathscr{S}_2$. Montrons qu'elle est libre. Si a, b, d sont trois scalaires tels que $aJ + bK + dL = 0$, cela donne $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = 0$, et par unicité des coefficients : $a = b = d = 0$. Ainsi, $\mathscr{B}_S$ est une base de $\mathscr{S}_2$ et $\dim \mathscr{S}_2 = 3$.

3. De la même manière que précédemment, on trouve que $\mathscr{A}_2 = \mathrm{Vect}(Z)$ où $Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Comme $Z \neq 0$, il constitue une famille libre, mais aussi génératrice de $\mathscr{A}_2$, donc $\mathscr{B}_A = (Z)$ est une base de $\mathscr{A}_2$ et $\dim \mathscr{A}_2 = 1$.

4. La juxtaposition de ces bases donne une famille de 4 vecteurs de E_2. Comme $\dim E_2 = 4$, il suffit de prouver que cette famille est libre pour prouver que c'est une base de E_2. Si une combinaison linéaire de J, K, L, Z est nulle pour quatre scalaires a, b, c, d, mettons :

$$aZ = bJ + cK + dL,$$

alors la matrice aZ est dans $\mathscr{S}_2$. Comme $aZ = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, elle ne peut être égale à sa transposée que si $a = 0$. Ce qui donne ensuite que $bJ + cK + dL = 0$, d'où $b = c = d = 0$ puisque $\mathscr{B}_S$ est une famille libre.

5. L'existence a été prouvée précédemment. Si, avec des notations évidentes, on a deux décompositions d'une même matrice en $A + S = A' + S'$, cela donne alors $A - A' = S - S'$. Avec le même argument qu'à la question précédente, $A - A' = 0$ puisque $A - A'$ est dans $\mathscr{A}_2$, mais aussi dans $\mathscr{S}_2$ (car égale à $S - S'$.) D'où $S = S'$.

Exercice 2

1. **a)** D'après le cours, les séries exponentielles sont convergentes, en particulier m_0 existe et vaut e. Pour m_1, on remarque que pour tout entier $n > 0$ $n/n! = 1/(n-1)!$, et que $0/0! = 0$. Finalement, le moment d'ordre 1 n'est rien d'ordre que la somme de la série exponentielle, et $m_0 = m_1 =$.

b) Soient n, d dans $\mathbf{N}$, et $n \geq d$ (ce qui n'est pas restrictif puisque n tend vers $+\infty$). Partant de la définition de la factorielle comme suggéré, on a par passage à l'inverse (aucun terme n'est nul dans le produit), et multiplication par n^d : $0 \leq \dfrac{n^d}{n!} = \underbrace{\dfrac{1}{(n-d)!}}_{A} \times \underbrace{\dfrac{n^d}{n(n-1)\times\cdots\times(n-d+1)}}_{B}$. Comme le produit $n(n-1)\times\cdots\times(n-d+1)$ est un produit de d facteurs qui sont chacuns équivalent à n, puisque d est fixé. On conclut que le dénominateur de B est équivalent à n^d. On conclut par produit et quotient d'équivalents.

c) La série $\displaystyle\sum_{n\geq d} \frac{1}{(n-d)!}$ est une série exponentielle (complète), donc convergente d'après le cours.

D'après le théorème sur les équivalents de séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geq d} \frac{n^d}{n!}$ converge aussi d'après l'équivalent de la question précédente et la positivité des termes de la série. Comme la nature d'une série ne change pas par troncature, on conclut que m_d existe.

2. **a)** D'après la forme factorisé des P_k, on a $\deg(P_k) = k$. La famille $\mathscr{B}'$ est donc une famille de polynômes non nuls à degrés deux à deux distincts. D'après le cours, elle est libre.

b) Comme $\mathbf{R}_d[X]$ est de dimension $d+1$ et que $\mathscr{B}'$ est une famille libre de $d+1$ vecteurs de $\mathbf{R}_d[X]$, c'en est bien une base. En particuiler, $X^d \in \mathbf{R}_d[X] = \mathrm{Vect}\left(\mathscr{B}'\right)$, donc il existe $d+1$ scalaires $\alpha_0, \ldots, \alpha_d$ tels que $X^d = \alpha_0 P_0 + \cdots + \alpha_d P_d$.

3. D'après la formule du changement base, en notant Π la matrice de passage de la base canonique à $\mathscr{B}'$, A la matrice colonne de l'énoncé, et E_d la matrice des coordonnées de X^d sur la base canonique, on a $E_d = \Pi \times A$. Autrement dit, $A = \Pi^{-1} E_d$ est la dernière colonne de la matrice Π^{-1}.

4. **a)** Soit $k \in \{1 \ldots d\}$ et $n \in \mathbf{N}$. On a par définition de P_k : $\frac{P_k(n)}{n!} = \frac{n(n-1) \times \cdots \times (n-k+1)}{n!}$. Comme les racines de P_k sont $0, \ldots, k-1$, ce quotient est nul si $n < k$. Sinon, on peut simplifier haut et bas le quotient par $P_k(n)$ et on trouve en résumé :

$$\frac{P_k(n)}{n!} = \left| \begin{array}{l} 0 \text{ si } n < k \\ \dfrac{1}{(n-k)!} \text{ si } n \geq k. \end{array} \right.$$

On peut remarquer enfin que ces formules restent aussi valables pour $k = 0$, ce qui finit de traiter tous les k.

b) En notant D le polynôme X^d, on a $\frac{n^d}{n!} = \frac{D(n)}{n!}$. Or, d'après **2b)**, $D = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k P_k$, donc :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \frac{n^d}{n!} = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k \frac{P_k(n)}{n!}.$$

En particulier, si $n \geq d$, on a par **3.** :

$$\frac{n^d}{n!} = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k \frac{1}{(n-k)!}.$$

Ainsi, pour $n \geq d$, le terme général $n^d/n!$ est combinaison linéaire de termes généraux de séries exponentielles (éventuellement tronquées). Comme l'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel, on conclut que $\sum_{n\geq d} n^d/n!$ converge, et par invariance de nature par troncature, la série définissant m_d aussi. Pour le calcul de m_d, on peut manipuler les sommes de séries maintenant que la convergence est établie :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^d}{n!} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{d}\alpha_k\frac{P_k(n)}{n!}\\
&= \sum_{k=0}^{d}\alpha_k\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{P_k(n)}{n!} \text{ par linéarité de la somme de séries}\\
&= \sum_{k=0}^{d}\alpha_k\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{P_k(n)}{n!} \text{ d'après } \mathbf{4.a)}\\
&= \sum_{k=0}^{d}\alpha_k\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{(n-k)!} \text{ d'après } \mathbf{4.a)} \text{ toujours}\\
m_d &= e\times\sum_{k=0}^{d}\alpha_k
\end{aligned}$$

Exercice 3

1. Soit $n\in\mathbf{N}^\star$. Comme L_n est réalisé si et seulement si tous les lancers sont effectués avec ou bien la pièce A, ou bien avec la pièce B, on a $L_n=\bigcap_{k=1}^{n}A_k\cup\bigcap_{k=1}^{n}B_k$, et la réunion est incompatible. Ensuite par additivité finie : $P(L_n)=P\left(\bigcap_{k=1}^{n}A_k\right)+P\left(\bigcap_{k=1}^{n}B_k\right)$. Enfin, d'après la formule des probabilités composées : $P\left(\bigcap_{k=1}^{n}A_k\right)=P(A_1)\times P_{A_1}(A_2)\times P_{A_1\cap A_2}(A_3)\times\cdots\times P\left(A_n\,\middle|\,\bigcap_{k=1}^{n-1}A_k\right)$. D'après la règle ii) du jeu, puisque l'on rejoue avec la même pièce si et seulement si on obtient `Pile`, on trouve que chaque facteur, à part le premier peut-être, vaut a. Avec le même raisonnement pour les B_k, et le fait que $P(A_1)=P(B_1)=1/2$ par la règle i), on trouve $P(L_n)=\dfrac{a^{n-1}+b^{n-1}}{2}$.

2. Soit $n\in\mathbf{N}^\star$.

a) D'après la formule des probabilités totales avec le système quasi-complet d'évènements (A_n,B_n), on a : $a_{n+1}=P_{A_n}(A_{n+1})a_n+P_{B_n}(A_{n+1}))(1-a_n)$. Sachant avec quelle pièce on joue au lancer n, la règle ii) nous dit que $P_{A_n}(A_{n+1})=a$ et que $P_{B_n}(A_{n+1})=1-b$, cela donne :

$$\forall n\geq 1\quad a_{n+1}=(a+b-1)a_n+(1-b)$$

b) On reconaît en la suite (a_n) une suite arithmético-géométrique. Soit C un réel vérifiant la relation $C=(a+b-1)C+(1-b)$. En retranchant cette dernière relation à la relation de récurrence, on observe que la suite de terme général a_n-C est géométrique de raison $(a+b-1)$. Comme par $a_1=1/2$, et que $a+b\neq 2$, le réel $C=\dfrac{1-b}{2-(a+b)}$ convient et finalement :

$$\forall n\in\mathbf{N}^\star\quad a_n=C+(a+b-1)^n\left(\frac{1}{2}-C\right).$$

3. Soit $n\in\mathbf{N}^\star$.

a) Sachant que A_1 est observé, on observe E_n si et seulement si les $n-1$ premiers lancers de la pièce A donnent `Pile` et le n-ème lancer de la pièce A donne `Face`. Comme les lancers de la pièce A peuvent être supposés mutuellement indépendants, $P_{A_1}(E_n)=a^{n-1}(1-a)$. Par symétrie des rôles des pièces A et B, $P_{B_1}(E_n)=b^{n-1}(1-b)$.

b) On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements (A_1, B_1). Avec les résultats de la question précédente, on obtient :

$P(E_n) = P_{A_1}(E_n)P(A_1) + P_{B_1}(E_n)P(B_1) = \frac{1}{2}\left((1-a)a^{n-1} + (1-b)b^{n-1}\right)$ pour tout entier $n \in \mathbf{N}^{\star}$.

c) L'évènement : F : «obtenir au moins une fois face» est la réunion des évènements E_n pour $n \geq 1$. Comme ces évènements sont deux à deux incompatibles, par σ-additivité, on déduit que la série $\sum_{n\geq 1} P(E_n)$ converge et que sa somme vaut $P(F)$: $P(F) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2}\left((1-a)a^{n-1} + (1-b)b^{n-1}\right)$.

Pour calculer $P(F)$, on remarque que le terme général de la somme est combinaison linéaire de termes généraux de séries géométriques de raisons a, b dans $]0, 1[$ donc convergentes. D'où :

$P(F) = \frac{1}{2}\left((1-a)\sum_{n=0}^{+\infty} a^n + (1-b)\sum_{n=0}^{+\infty} b^n\right) = 1.$

d) Par définition, la famille $(E_n)_{n\geq 1}$ constitue un système quasi-complet d'évènements d'après les deux dernières questions.