DM6 Un point lumineux se déplace sur un cercle

pour jeudi 21 décembre

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ on considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.
Sur ce cercle, on place les points $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(-1,0)$ et $D(0,-1)$.
Un point lumineux se déplace aléatoirement sur le cercle $\mathcal{C}$.
Initialement, à l'instant 0, le point lumineux se trouve en A.
On note p un nombre réel de $]0,1[$ et on pose $q = 1 - p$.
Si à l'instant n, le point lumineux est au point du cercle d'argument θ alors, à l'intant $n+1$, il sera
- au point du cercle d'argument $\theta + \frac{\pi}{2}$ avec la probabilité p
- au point du cercle d'argument $\theta - \frac{\pi}{2}$ avec la probabilité q.

Pour tout entier naturel n, on définit les événement A_n (respectivement B_n, C_n, D_n) par :

A_n : ‹‹ à l'instant n, le point lumineux se trouve en A (respectivement B, C, D) ››

et on note a_n, b_n, c_n et d_n les probabilités des événements A_n, B_n, C_n et D_n respectivement.

Enfin, on note, pour tout entier naturel n, $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix}$.

1. **a.** Déterminer une matrice M telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = MU_n$.

b. Donner U_0 et, pour tout entier naturel n, déterminer U_n en fonction de M, n et U_0.

2. Dans cette question, on suppose que $p = q = \frac{1}{2}$.

a. Justifier que la matrice M est diagonalisable.

b. Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $M = PDP^{-1}$.

c. Donner alors une méthode pour déterminer a_n, b_n, c_n et d_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

On ne demande pas de le faire.

3. Dans cette question, on suppose que $p \neq \frac{1}{2}$.

Dans $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C})$, on considère les matrices colonnes :

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}, C_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } C_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix}.$$

a. Pour $i \in \{1,2,3,4\}$, calculer MC_i.

En déduire que C_1, C_2, C_3 et C_4 sont des vecteurs propres de M et préciser leur valeur propre λ_1, λ_2, λ_3 et λ_4 associée.

b. Justifier alors que M est diagonalisable et que la famille $\mathcal{B} = (C_1, C_2, C_3, C_4)$ est une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C})$.

c. Pour $i \in \{1,2,3,4\}$, déterminer $M^n C_i$ pour tout entier naturel n.

d. En calculant $C_1 + C_2 + C_3 + C_4$, donner la décomposition de U_0 dans la base $\mathcal{B}$.

En déduire, pour tout entier naturel n, la décomposition de U_n dans la base $\mathcal{B}$.

e. Pour $p = \frac{1}{3}$, donner les expressions de a_n, b_n, c_n et d_n en distinguant selon la parité de n.