Variables aléatoires réelles discrètes

**Ce qu'il faut connaître** :

-la définition de la loi de probabilité d'une vard
-la définition de la fonction de répartition d'une vard
-trouver la loi de probabilité d'une vard connaissant sa fonction de répartition
-la définition du moment d'ordre $r$ quelconque d'une vard
-la définiton de l'espérance d'une vard
-les propriétés de positivité, croissance, linéarité de l'espérance
-le théorème de transfert
-la définition de la variance et de l'écart-type d'une vard
-le théorème de Koenig
-Loi certaine, espérance et variance
-Loi uniforme, espérance de la loi uniforme sur $\{1, \cdots, n\}$
-Loi de Bernoulli, espérance et variance
-Loi binomiale, espérance et variance
-Loi de Poisson, espérance et variance
-Loi géométrique, espérance et variance, propriété d'invariance temporelle

## 1. Comment vérifier qu'une loi donnée est la loi d'une variable aléatoire réelle discrète

Si l'énoncé donne $X(\Omega)$ et une formule pour $P(X = k)$ pour tout $k$ de $X(\Omega)$ alors il faut vérifier que :
-$\forall k \in X(\Omega),\ P(X = k) \geqslant 0$
-la série $\sum P(X = k)$ est convergente (toujours vrai si $X(\Omega)$ est fini) et $\sum\limits_{k \in X(\Omega)} P(X = k) = 1$

## 2. Comment déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle discrète

-On détermine $X(\Omega)$ ou, au moins, un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant $X(\Omega)$
-On essaie de reconnaître une loi usuelle :

•Si $X(\Omega)$ est fini et

a. $X$ prend une valeur réelle $m$ avec la probabilité 1 alors $X$ suit une loi certaine
b. $X$ n'a que deux issues, 1 avec la probabilité $p$, et 0 alors $X$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p$
c. $X$ prend un nombre fini de valeurs ($X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$) de manière équiprobable alors $X \hookrightarrow \mathcal{U}(X(\Omega))$
d. $X$ est le nombre de succès au cours de $n$ itérations identiques d'une épreuve de Bernoulli de paramètre $p$ alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$

•Si $X(\Omega)$ est infini et si $X$ est le rang du premier succès d'une infinité de répétitions d'une épreuve de Bernoulli de paramètre $p$ alors $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$

-Si on ne reconnaît pas une loi usuelle alors, pour tout $k$ de $X(\Omega)$, on explicite l'événement

a. $[X = k]$ puis on détermine $P(X = k)$
b. $[X \leqslant k]$ (par ex dans le cas où $X$ est un max), on détermine $P(X \leqslant k)$ puis on calcule $P(X = k) = P(X \leqslant k) - P(X \leqslant k - 1)$
c. $[X > k]$ (par ex dans le cas où $X$ est un min), on détermine $P(X > k)$ puis on calcule $P(X = k) = P(X > k - 1) - P(X > k)$

-Si $X = \varphi(Y)$ où $Y$ est une vard dont on cannaît la loi alors $X(\Omega) = \varphi(Y(\Omega))$ et $\forall x \in X(\Omega)$,
$P(X = x) = \sum\limits_{k \in Y(\Omega) \mid \varphi(k) = x} P(Y = k)$

**3. Comment déterminer la fonction de répartion d'une vard dont on connaît la loi**

Si $X(\Omega) = \{x_n, n \in I\}$ ($x_n$ dans l'ordre croissant) alors $\forall t \in \mathbb{R},\ F_X(t) = \sum\limits_{n \in I \,|\, x_n \leqslant t} P(X = x_n)$

**4. Comment déterminer l'espérance d'une variable aléatoire réelle discrète dont on connait la loi**

**a.** Si $X$ suit une loi usuelle alors on utilise directement les formules du cours

**b.** Si $X$ ne suit pas une loi usuelle et

Si $X(\Omega)$est fini, $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$, alors on calcule $E(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$

Si $X(\Omega)$ est infini alors

-si la série $\sum x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente alors $E(X) = \sum\limits_{x_n \in X(\Omega)} x_n P(X = x_n)$

-si la série $\sum x_n P(X = x_n)$ n'est pas absolument convergente alors $X$ n'admet pas d'espérance

**c.** Si $X = \varphi(Y)$ où $Y$ est une vard connue alors on utilise le théorème de transfert :
sous réserve de convergence absolue, $E(X) = \sum\limits_{y_n \in Y(\Omega)} \varphi(y_n) P(Y = y_n)$

**d.** Si $X = aY + b$ où $Y$ est une vard connue admettant une espérance alors $E(X) = aE(Y) + b$

**5. Comment déterminer la variance d'une variable aléatoire réelle discrète dont on connait la loi**

**a.** Si $X$ suit une loi usuelle alors on utilise directement les formules du cours (sauf loi hypergéométrique)

**b.** Si $X$ ne suit pas une loi usuelle alors on utilise le théorème de Koenig $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

Si $X(\Omega)$est fini, $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$, on calcule $E(X^2) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 P(X = x_i)$

Si $X(\Omega)$ est infini alors

-si la série $\sum x_n^2 P(X = x_n)$ est convergente alors $E(X^2) = \sum\limits_{x_n \in X(\Omega)} x_n P(X = x_n)$

-si la série $\sum x_n^2 P(X = x_n)$ diverge alors $X$ n'admet pas de variance

**c.** Si $X = aY + b$ où $Y$ est une vard connue admettant une variance alors $V(X) = a^2 V(Y)$