TD 10 : Diagonalisation des matrices

1 Résultat classique

1 Soit M une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, λ une valeur propre de M et U un vecteur propre associé.

1. Soit $k \in \mathbf{N}$. Exprimer $M^k U$ en fonction de λ, U et k. Rappel : $M^0 = I_n$.
2. Soit $Q = \sum_{k=0}^{m} q_k X^k$ un polynôme à coefficients dans $\mathbf{K}$. Notons $Q(M)$ la matrice $\sum_{k=0}^{m} q_k M^k$.
   (a) Exprimer le vecteur $Q(M)U$ en fonction de Q, λ et U.
   (b) En déduire que si $Q(M)$ est la matrice nulle, et si λ est une valeur propre de M, alors λ est une racine du polynôme Q.

2 Applications directes du cours

2 Calculer le spectre des matrices A suivantes, étudier leur éventuelle diagonalisabilité et, le cas échéant, donner une matrice P inversible diagonalisant A.

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} -5 & 6 & 4 \\ -4 & 5 & 4 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$
5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ -3 & 9 & 8 \end{pmatrix}$
6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -4 & -8 & -5 \end{pmatrix}$
7. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

3 Soit M la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $M^2 - 3M + 2I_3$.
2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres associés de M (*s'inspirer de l'exercice 1*).
3. M est-elle diagonalisable ?

3 Applications de la diagonalisation

4 On définit trois suites par $u_0 = 1$, $v_0 = 1$, $w_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = -5u_n + 6v_n + 4w_n \\ v_{n+1} = -4u_n + 5v_n + 4w_n \\ w_{n+1} = 2u_n - 2v_n - 3w_n \end{cases}$$

1. Soit $n \in \mathbf{N}$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice A telle que

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad X_{n+1} = A\, X_n.$$

2. Diagonaliser A et préciser la matrice de passage P et le produit matriciel $P^{-1}AP$ (utiliser **Ex. 5**).
3. Soit $n \in \mathbf{N}$. Calculer A^n.
4. Déterminer u_n, v_n, w_n en fonction de n et de u_0, v_0, w_0 pour tout entier n.

$\boxed{5}$ Soit A la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ -3 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

1. Trouver une matrice P inversible et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$. (voir **Ex. 5**)
2. On considère le système différentiel, d'inconnues les fonctions x, y, z de la variable t définies sur $\mathbf{R}$ et donné par :

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & x + 3y + 2z \\ y' & = & -2y - 2z \\ z' & = & -3x + 9y + 8z \end{array} \right.$$

   (a) On définit des fonctions u, v, w par :

$$Y = P^{-1}X \quad \text{où} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

   (b) Écrire le système différentiel vérifié par u, v, w et en déduire les solutions de (S)

$\boxed{6}$ Le Grand Méchant Loup mange dans trois alpages A, B et C. Il ne mange jamais dans le même alpage deux jours d'affilée. S'il mange dans A, il mangera dans B le jour suivant. S'il mange dans B ou C, le lendemain il mangera dans A avec une probabilité deux fois plus grande qu'en C ou B.

On note a_n, b_n, c_n les probabilités que le Loup se trouve respectivement dans les alpages A, B, C après n jours. On pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer M une matrice carrée d'ordre 3 telle que $X_{n+1} = M\,X_n$.
2. Déterminer les valeurs propres de M et le sous-espace propre associé à la valeur propre 1.
3. Vérifier que M est diagonalisable.
   On note $b = (V_1, V_2, V_3)$ une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de M.
   On suppose que $X_0 = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \alpha_3 V_3$ où $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ (on ne demande pas de calculer $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$).
   Calculer $M^n X_0$ en fonction de n et de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, V_1, V_2, V_3$.
4. En remarquant $a_n + b_n + c_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer la limite des probabilités a_n, b_n, c_n lorsque n tend vers $+\infty$. Quel est l'alpage le plus sûr pour le Petit Chaperon Rouge ?