Corrigé DM6

1. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$.

(A_n, B_n, C_n, D_n) est un système complet d'événement. La formule des probabilités totales donne :
$P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1}) + P(D_n)P_{D_n}(A_{n+1})$
Or, d'après le déplacement du point lumineux, si à l'intant n il est en A (resp. B, C, D) alors, à l'instant $n+1$ il est en B (resp. C, D, A) avec la probabilité p et en D (reps. A, B, C) avec la probabilité q.
On a alors $P_{A_n}(A_{n+1}) = P_{C_n}(A_{n+1}) = 0$, $P_{B_n}(A_{n+1}) = q$ et $P_{D_n}(A_{n+1}) = p$ donc $a_{n+1} = qb_n + pd_n$.
On procède de même pour b_{n+1}, c_{n+1} et d_{n+1}.
On obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = qb_n + pd_n \\ b_{n+1} = pa_n + qc_n \\ c_{n+1} = pb_n + qd_n \\ d_{n+1} = qa_n + pc_n \end{cases} \text{ donc } \boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = MU_n \text{ où } M = \begin{pmatrix} 0 & q & 0 & p \\ p & 0 & q & 0 \\ 0 & p & 0 & q \\ q & 0 & p & 0 \end{pmatrix}}.$$

b. Comme à l'instant 0, le point lumineux se trouve en A, $\boxed{U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$.

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = M^n U_0$:
Pour $n = 0$, $M^0 = I_4$ donc on a bien $U_0 = M^0 U_0$.
Si $U_n = M^n U_0$ alors $U_{n+1} = MU_n = MM^nU_0 = M^{n+1}U_0$.
On conclut que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = M^n U_0}$.

2. Si $p = q = \frac{1}{2}$ alors $M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a. M est une matrice symétrique réelle donc la matrice $\boxed{M \text{ est diagonalisable}}$.

b. On cherche tout d'abord le spectre de M : soit $\lambda \in \mathbb{R}$
$\lambda \in spec(M) \Leftrightarrow M - \lambda I_4$ n'est pas inversible $\Leftrightarrow rg(M - \lambda I_4) < 4$.

$$\text{Or } rg(M - \lambda I_4) = rg\begin{pmatrix} -2\lambda & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2\lambda & 1 \\ \boxed{1} & 0 & 1 & -2\lambda \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + 2\lambda L_4 \\ L_2 \leftarrow L_4 - L_2}}{=} rg\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2\lambda & 1-4\lambda^2 \\ 0 & 2\lambda & 0 & -2\lambda \\ 0 & \boxed{1} & -2\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2\lambda \end{pmatrix} \underset{\substack{L_1 \leftarrow (L_1 - L_3)/4 \\ L_2 \leftarrow (L_2 - 2\lambda L_3)/4}}{=} rg\begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda & -\lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^2 & -\lambda \\ 0 & 1 & -2\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2\lambda \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - \lambda L_1}{=} rg\begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda & -\lambda^2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda(\lambda^2 - 1) \\ 0 & 1 & -2\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2\lambda \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $rg(M - \lambda I_4) < 4 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ou $\lambda^2 = 1$. Ainsi, $spec(M) = \{0, -1, 1\}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

$X \in E_0(M) \Leftrightarrow MX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y+t=0 \\ x+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-t \\ x=-z \end{cases}$.

$X \in E_1(M) \Leftrightarrow MX = X \Leftrightarrow (M-I_4)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z-t=0 \\ y-2z+t=0 \\ x+z-2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=t \\ y=t \\ x=t \end{cases}$.

$X \in E_{-1}(M) \Leftrightarrow MX = -X \Leftrightarrow (M+I_4)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z+t=0 \\ y+2z+t=0 \\ x+z+2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-t \\ y=t \\ x=-t \end{cases}$.

Soit $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

alors $E_0(M) = vect(X_1, X_2)$, $E_1(M) = vect(X_3)$ et $E_{-1}(M) = vect(X_4)$.
La famille (X_1, X_2, X_3, X_4) est obtenue par juxtaposition des bases des sous-espaces propres de M associés à des valeurs propres distinctes, comme elle est de cardinal 4, (X_1, X_2, X_3, X_4) est une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.
On conclut, en posant

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ alors } M = PDP^{-1}}.$$

c. On souhaite déterminer U_n en fonction de n :
d'après **1b**., $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = M^n U_0$ or $M = PDP^{-1}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = PD^nP^{-1}$.
Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = PD^nP^{-1}U_0$.
On calcule $V_0 = P^{-1}U_0$ en résolvant le système $PV_0 = U_0$.
Puis on calcule PD^nV_0 où $D^n = diag(0, 0, 1, (-1)^n)$.

$\boxed{\text{Les réels } a_n,\ b_n,\ c_n \text{ et } d_n \text{ sont les coefficients de la matrice colonne obtenue } U_n = PD^nV_0}$.

d. On calcule $MC_1 = \begin{pmatrix} 0 & q & 0 & p \\ p & 0 & q & 0 \\ 0 & p & 0 & q \\ q & 0 & p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+q \\ p+q \\ p+q \\ p+q \end{pmatrix} = (p+q)C_1$. Comme $p+q=1$,
on obtient $MC_1 = C_1$. On calcule de même MC_2, MC_3 et MC_4 et on obtient
$\boxed{MC_1 = C_1,\ MC_2 = i(1-2p)C_2,\ MC_3 = -C_3 \text{ et } MC_4 = i(2p-1)C_4}$.

Par définition de vecteurs propres, $\boxed{C_1, C_2, C_3 \text{ et } C_4 \text{ sont des vecteurs propres de } M}$.

$\boxed{\text{Les valeurs propres associées sont } \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = i(1-2p),\ \lambda_3 = -1,\ \lambda_4 = i(2p-1)}$.

e. Comme $0 < p < 1$ et $p \neq \frac{1}{2}$, les valeurs propres sont deux à deux dsitinctes donc, étant de cardinal 4, $\boxed{\text{la famille } \mathcal{B} = (C_1, C_2, C_3, C_4) \text{ est une base de } \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C})}$.

f. Pour $i \in \{1,2,3,4\}$, $MC_i = \lambda_i C_i$, donc par récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ M^n C_i = \lambda_i^n C_i}$.

g. Par simples calculs, $C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 4U_0$ donc $\boxed{U_0 = \frac{1}{4}(C_1 + C_2 + C_3 + C_4)}$.

D'après **2b.**, $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = M^n U_0 = \frac{1}{4} M^n (C_1 + C_2 + C_3 + C_4)$
$= \frac{1}{4}(M^n C_1 + M^n C_2 + M^n C_3 + M^n C_4) = \frac{1}{4}(\lambda_1^n C_1 + \lambda_2^n C_2 + \lambda_3^n C_3 + \lambda_4^n C_4)$.

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = \frac{1}{4}(C_1 + (i(1-2p))^n C_2 + (-1)^n C_3 + (i(2p-1))^n C_4)}$.

h. Pour $p = \frac{1}{3}$, on obtient $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = \frac{1}{4}\left(C_1 + \left(\frac{i}{3}\right)^n C_2 + (-1)^n C_3 + \left(\frac{-i}{3}\right)^n C_4\right)$

soit $U_n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 + \left(\frac{i}{3}\right)^n + (-1)^n + \left(\frac{-i}{3}\right)^n \\ 1 + i\left(\frac{i}{3}\right)^n - (-1)^n - i\left(\frac{-i}{3}\right)^n \\ 1 - \left(\frac{i}{3}\right)^n + (-1)^n - \left(\frac{-i}{3}\right)^n \\ 1 - i\left(\frac{i}{3}\right)^n - (-1)^n + i\left(\frac{-i}{3}\right)^n \end{pmatrix}$.

On en déduit que :

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n} = \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{-1}{9}\right)^n\right),\ c_{2n} = \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{-1}{9}\right)^n\right) \text{ et } b_{2n} = d_{2n} = 0}$

et $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n+1} = c_{2n+1} = 0,\ b_{2n+1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{9}\right)^n\right) \text{ et } d_{2n+1} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{9}\right)^n\right)}$.