TD 11 : Variables aléatoires discètes

1 Résultat classique

$\boxed{1}$ Soit $p \in]0,1[$. Une machine fabrique des pièces sans défaut avec la probabilité p. Ces pièces sont contrôlées au fur et à mesure. Dès que l'on obtient une pièce défectueuse, on arrête la machine. Soit N le nombre de pièces fabriquées sans défaut. Déterminer la loi de N, puis calculer son espérance et sa variance.

$\boxed{2}$ On dispose d'un dé équilibré et d'une urne contenant une boule blanche. On effectue une suite de lancers successifs avec le dé : à chaque fois que l'on obtient un résultat différent de 6, on ajoute une boule rouge dans l'urne et effectue un nouveau tirage. Si on obtient un 6, on extrait une boule de l'urne, puis l'expérience s'arrête.

On note X la variable aléatoire égale au rang auquel on obtient le 6 et Y la variable aléatoire égale à 1 si on extrait une boule blanche et 0 sinon.

1. (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Quelle est la probabilité d'avoir obtenu le premier six au plus tard au k-ième lancer ?
2. Montrer que pour tout réel x dans $[0,1[$, la série de terme général $\dfrac{x^k}{k}$ converge et que sa somme est $-\ln(1-x)$. S'inspirer du TD7.
3. Calculer la loi de Y.

2 Applications directes du cours

$\boxed{2}$ Soit n et N deux entiers naturels non nuls. On répartit au hasard n tickets de tombola entre N personnes dont Alice. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tickets reçus par Alice.

Déterminer la loi, l'espérance, et la variance de X.

$\boxed{3}$ On dispose de $2n$ jetons dont n jetons sont numérotées de 1 à n, et n jetons ne sont pas numérotées. On extrait un jeton : s'il est numéroté on arrête, sinon on le remet dans l'urne et on tire à nouveau un jeton suivant le même protocole, tout en effectuant au maximum n tirages.

1. Déterminer la loi de la v.a.r. X égale au nombre de jetons non numérotés extraits.
2. Calculer l'espérance de X.

$\boxed{4}$ On dispose de $(2n+1)$ jetons dont une face est noire et l'autre blanche. Ensuite, on lance simultanément les $(2n+1)$ jetons. On obtient un nombre pair de jetons dont la face apparente est de couleur donnée et un nombre impair de jetons dont la face apparente est de l'autre couleur. Soit X la variable aléatoire égale à ce nombre impair.

1. Donner la loi de X et vérifier que X est bien une variable aléatoire.
2. Calculer l'espérance de X.

3 Exercices classiques

$\boxed{4}$ Un sauteur de haies saute successivement une infinité de hauteurs numérotées $1, 2 \dots n, \dots$. La probabilité de sauter avec succès la hauteur n est $1/n$. On note X le nombre de haies sautées avec succès.

1. Déterminer la loi de X et vérifier que l'on a bien : $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}(X=k) = 1$.
2. (a) Calculer $\mathrm{E}(X+1)$ et $\mathrm{E}\big((X+1)(X-1)\big)$.

(b) En déduire l'espérance et la variance de X.

$\boxed{5}$ Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue des tirages successifs avec remise jusqu'à obtenir une boule dont le numéro est supérieur ou égal à celui de la boule précédemment extraite.
On note X_n le nombre de tirages effectués.

1. Calculer $\mathrm{P}(X_n > j)$ pour $j \in \mathbb{N}$ et en déduire $\mathrm{P}(X_n = j)$ pour $j \in \mathbb{N}$.
2. Calculer leur limite quand n tend vers $+\infty$.

$\boxed{6}$ Une particule est astreinte à se déplacer sur un axe gradué par saut d'une unité. Pour $k \in \mathbb{Z}$, la particule passe des abscisses k à $k+1$ avec la probabilité $p \in]0,1[$ et de k à $k-1$ avec la probabilité $q = 1-p$. Elle démarre de l'origine 0.

1. Quelle est la probabilité de revenir au point d'origine après dix sauts ?
   Quelle est la probabilité d'être à deux pas de l'origine après dix sauts ?
2. La particule s'arrête désormais lorsqu'elle effectue deux sauts successifs dans le même sens. Déterminer la loi de la variable aléatoire X égale au nombre de sauts effectués avant qu'elle ne s'arrête. Calculer sa moyenne.

$\boxed{7}$ Soit X une VAR de loi géométrique de paramètre p à valeurs dans $\mathbb{N}$. Un compteur indique la loi de X, mais il est détraqué : si X prend une valeur inférieure ou égale à N, il affiche bien cette valeur, mais sinon il affiche un nombre entier au hasard entre 0 et N. On appelle Y la variable aléatoire affichée. Déterminer la loi de Y et calculer son espérance.

$\boxed{8}$ Soit X une variable de Poisson de paramètre λ.
Comparer les probabilités des évènements « X est pair » et « X est impair ».

4 Autre exercice

$\boxed{4}$ Soit n, b deux entiers strictement positifs. On considère une urne $\mathscr{U}$ qui contient b boules blanches et n boules noires. On pose $N = b + n$. Soit r un entier, $r \in \mathbb{N}^*$. On prélève les boules de $\mathscr{U}$ une par une, au hasard et avec remise. On note T_r le temps d'attente de la r-ième boule blanche.

1. Donner la loi de T_r.
2. En admettant que T_r est une variable aléatoire, montrer que :

$$\forall x \in [0,1[\quad \forall s \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=s}^{+\infty} \binom{k}{s} x^{k-s} = \frac{1}{(1-x)^{s+1}}.$$

3. Montrer que $\mathrm{E}(T_r) = \dfrac{r}{p}$ où $p = \dfrac{b}{N}$.