Intégrales généralisées

I Intégrales impropres

Dans ce chapitre, on généralise la notion d'intégrale de fonctions continues ou continues par morceaux à des intervalles de la forme $[a,b[,\ ]a,b]$ ou $]a,b[$ où a et b sont des réels finis ou infinis.
En première année vous avez vu que :
si f est continue sur $[a,b]$ alors f admet une primitive F sur $[a,b]$.
L'intégrale de f est alors définie par : $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$.
Si f n'est pas définie en b ou a (ou les deux) alors cette définition de l'intégrale de f sur l'un des intervalles $[a,b[,\ ]a,b]$ ou $]a,b[$ n'a pas de sens.
On dit que $\int_a^b f(t)\,dt$ est une intégrale impropre.

Remarque On doit parfois étudier des intégrales faussement impropres, c'est-à-dire l'intégrale d'une fonction continue sur $[a,b[$ (resp. sur $]a,b]$, resp. sur $]a,b[$) et qui admet une limite finie en b (resp. en a, resp. en a et en b). Dans ce cas, f est prolongeable par continuité en b (resp. en a, resp. en a et en b) en une fonction continue sur $[a,b]$.
En notant encore f ce prolongement, l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment (intervalle fermé borné) et n'est pas impropre. Exemple : $\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,dt$.

1. Intégrale d'une application continue sur un intervalle [a,b[

Définition 1 Soit a et b tels que $a < b \leqslant +\infty$, f une fonction continue sur $[a,b[$ et F une primitive de f sur $[a,b[$.
On dit que l'intégrale, impropre en b, $\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente (existe ou a un sens) si, et seulement si, F admet une limite finie quand x tend vers b par valeurs inférieures.
Dans ce cas, on note $\int_a^b f(t)\,dt = \lim\limits_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\,dt = \lim\limits_{x\to b^-} F(x) - F(a)$.
Dans le cas contraire (pas de limite ou limite infinie), on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est divergente.

Exercice 1 Les intégrales suivantes ont-elles un sens ?

(1) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt$ (2) $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ (3) $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$

2. Intégrale d'une application continue sur un intervalle]a,b]

De manière analogue :

Définition 2 Soit a et b tels que $-\infty \leqslant a < b$, f une fonction continue sur $]a,b]$ et F une primitive de f sur $]a,b]$
On dit que l'intégrale, impropre en a, $\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente (existe ou a un sens) si, et seulement si, F admet une limite finie quand x tend vers a par valeurs supérieures.
Dans ce cas, on note $\int_a^b f(t)\,dt = \lim\limits_{x\to a^+} \int_x^b f(t)\,dt = F(b) - \lim\limits_{x\to a^+} F(x)$.
Dans le cas contraire (pas de limite ou limite infinie), on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est divergente.

Exercice 2 Les intégrales suivantes sont-elles convergentes ?

(1) $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$. (2) $\int_0^1 \frac{dt}{t}$. (3) $\int_0^1 \ln t\,dt$.

3. Intégrale d'une application continue sur un intervalle]a,b[

Définition 3 Soit a et b tels que $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, f une fonction continue sur $]a,b[$ et $c \in]a,b[$.
L'intégrale, impropre en a et en b, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente (existe ou a un sens) si, et seulement si, les deux intégrales $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes.
Dans ce cas, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3 Les intégrales suivantes existent-elles ?

1-$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$. 2-$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$. 3-$\int_{-\infty}^{+\infty} e^t\,\mathrm{d}t$.

4. Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle sauf en un nombre fini de points

Proposition 1 Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a,b]$ sauf en un nombre fini de points $c_1, \cdots, c_n$. On suppose $c_0 = a \leqslant c_1 \leqslant \cdots \leqslant c_n \leqslant c_{n+1} = b$.
On dit que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente si, et seulement si : $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\int_{c_k}^{c_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.
Dans ce cas, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \int_{c_k}^{c_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 4 L'intégrale $\int_{-1}^{1} \frac{x}{1+2x}\,\mathrm{d}x$ est-elle convergente ?

II Propriétés de l'intégrale

Là encore, on généralise les notions déjà vues pour les intégrales des fonctions continues sur un segment.

1. Relation de Chasles

Proposition 2 • Soit f une fonction coninue sur $[a,b[$ et soit $c \in [a,b[$.
Alors l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente si, et seulement si, $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.
Dans ce cas, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
• Soit f une fonction coninue sur $]a,b]$ et soit $c \in]a,b]$.
Alors l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente si, et seulement si, $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.
Dans ce cas, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

2. Linéarité

Proposition 3 Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b[$ (resp.sur $]a,b]$)
Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.
Si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent alors $\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t$ converge
et dans ce cas, $\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

3. Positivité et croissance

Proposition 4 Soit f une fonction continue sur $[a,b[$ (resp.sur $]a,b]$) telle que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ soit convergente. Si f est positive sur $[a,b[$ (resp.sur $]a,b]$) alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

Conséquence Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b[$ (resp.sur $]a,b]$) telles que les intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ soient convergentes. Si $f \leqslant g$ sur $[a,b[$ (resp.sur $]a,b]$) alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant. \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

Exemple $\forall t \geqslant 1,\ 0 < \dfrac{1}{1+t^2} < \dfrac{1}{t^2}$,
De plus, $\forall x \geqslant 1, \int_1^x \dfrac{\mathrm{d}t}{t^2} = \left[-\dfrac{1}{t}\right]_1^x = 1 - \dfrac{1}{x}$ et $\int_1^x \dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = [\arctan t]_1^x = \arctan x - \dfrac{\pi}{4}$.
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_1^x \dfrac{\mathrm{d}t}{t^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x} + 1 = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_1^x \dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4}$
les intégrales $\int_1^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}t}{t^2}$ et $\int_1^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ sont convergentes et on a bien $\int_1^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \leqslant \int_1^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}t}{t^2}$.

Proposition 5 Soit f une fonction continue sur $[a,b[$ (resp. $]a,b]$) telle que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ soit convergente. Si f est positive sur $[a,b[$ (resp. $]a,b]$) et si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ alors f est nulle sur $[a,b[$ (resp. $]a,b]$).

III Critères de convergence

1. Théorème de comparaison pour des fonctions positives

Proposition 6 Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b[$ (resp. $]a,b]$) telles que $0 \leqslant f \leqslant g$ sur $[a,b[$ (resp. $]a,b]$).
- Si l'intégrale $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.
- Si l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente alors $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente.

Remarque Si les intégrales sont impropres en b et si f et g ne sont positives que sur $[c,b[$ alors on utilise la relation de Chasles et son critère de convergence.

Exercice 5 Les intégrales $\int_1^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^3}$ et $\int_0^1 \dfrac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$ sont-elles convergentes ?

Conséquence Soit f et g deux fonctions continues et positives sur $[a,b[$ (resp.sur $]a,b]$)
Si $f \underset{b}{\sim} g$ (resp.$f \underset{a}{\sim} g$) alors les intégrales impropres $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Preuve Si $f \underset{b}{\sim} g$ alors $\exists c \in [a,b[\,|\ \forall t \in [c,b[,\ 0 \leqslant \dfrac{1}{2}g(t) \leqslant f(t) \leqslant \dfrac{3}{2}g(t)$
Si $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente alors, comme $\forall t \in [c,b[,\ 0 \leqslant f(t) \leqslant \dfrac{3}{2}g(t)$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.
Si $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente alors, comme $\forall t \in [c,b[,\ 0 \leqslant \dfrac{1}{2}g(t) \leqslant f(t)$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente.

2. Absolue convergence

Définition 4 Soit f une fonction continue sur $[a,b[$ (resp.sur $]a,b]$).
L'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ est absolument convergente si, et seulement si, l'intégrale généralisée $\int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t$ est convergente.

Proposition 7 Soit f une fonction continue sur $[a,b[$ (resp.sur $]a,b]$).
Si l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ est absolument convergente alors elle est convergente et dans ce cas, $\left|\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t$.

Preuve On note $f_+ = \frac{1}{2}(|f|+f)$ et $f_- = \frac{1}{2}(|f|-f)$.
Alors sur $[a,b[$ (resp.sur $]a,b]$), $0 \leqslant f_+ \leqslant |f|$ et $0 \leqslant f_- \leqslant |f|$.
Si l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ est absolument convergente alors $\int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t$ est convergente et, d'après le th. de comparaison des fonctions positives, $\int_a^b f_+(t)$ et $\int_a^b f_-(t)\ \mathrm{d}t$ sont convergentes.
Comme $f = f_+ - f_-$, par linéarité, $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ est convergente.
De plus, $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$ donc $-\int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t$.

Exercice 6 Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\ \mathrm{d}t$ est convergente.

Remarque L'intérêt de la proposition est qu'on est ramené à l'étude d'une intégrale généralisée d'une fonction positive. Mais la proposition est une implication et non une équivalence.
La réciproque est fausse.

Exercice 7 Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\ \mathrm{d}t$ est convergente mais non absolument convergente.
Indication pour la non absolue convergence : $\forall t \geqslant 1,\ |\cos t| \geqslant \cos^2 t$.

IV Calcul d'une intégrale généralisée

1. Utilisation d'une primitive

• si f est une fonction continue sur $[a,b[$ qui admet une primitive F sur $[a,b[$
alors $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, F admet une limite finie en b
et dans ce cas, $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \lim_{x\to b^-} F(x) - F(a)$

• si f est une fonction continue sur $]a,b]$ qui admet une primitive F sur $]a,b]$
alors $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, F admet une limite finie en a
et dans ce cas, $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = F(b) - \lim_{x\to a^+} F(x)$

• si f est une fonction continue sur $]a,b[$ qui admet une primitive F sur $]a,b[$
alors $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, F admet une limite finie en a et une limite finie en b.
et dans ce cas, $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x)$

2. Utilisation d'une intégration par parties

On étend la formule d'intégration par parties au cas des intégrales généralisées :

• Soit u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b[$.
L'intégrale généralisée $\int_a^b u(t)v'(t)\ \mathrm{d}t$ converge si, et seulement si :

uv admet une limite finie en b et l'intégrale impropre $\int_a^b u'(t)v(t)\ \mathrm{d}t$ converge.

Dans ce cas, $\int_a^b u(t)v'(t)\ \mathrm{d}t = \lim\limits_{x\to b^-} u(x)v(x) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(t)v(t)\ \mathrm{d}t$.

• Soit u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b]$.
L'intégrale généralisée $\int_a^b u(t)v'(t)\ \mathrm{d}t$ converge si, et seulement si :

uv admet une limite finie en a et l'intégrale impropre $\int_a^b u'(t)v(t)\ \mathrm{d}t$ converge.

Dans ce cas, $\int_a^b u(t)v'(t)\ \mathrm{d}t = u(b)v(b) - \lim\limits_{x\to a^+} u(x)v(x) - \int_a^b u'(t)v(t)\ \mathrm{d}t$.

• Soit u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b[$.
L'intégrale généralisée $\int_a^b u(t)v'(t)\ \mathrm{d}t$ converge si, et seulement si :

uv admet une limite finie en a et une limite finie en b et l'intégrale $\int_a^b u'(t)v(t)\ \mathrm{d}t$ converge.

Dans ce cas, $\int_a^b u(t)v'(t)\ \mathrm{d}t = \lim\limits_{x\to b^-} u(x)v(x) - \lim\limits_{x\to a^+} u(x)v(x) - \int_a^b u'(t)v(t)\ \mathrm{d}t$.

Exercice 8 Calculer les intégrales généralisées suivantes

1-$I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\ \mathrm{d}t$ 2-$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{n+1}}$ où $n \in \mathbb{N}$

3. Utilisation d'un changement de variable

On étend la formule de changement de variable au cas des intégrales impropres :
Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I = [\alpha,\beta]$ (ou $]\alpha,\beta]$, $[\alpha,\beta[$).
On suppose de plus que φ est strictement monotone de I vers $J = \varphi(I) = [a,b[$ (ou $]a,b]$ ou $]a,b[$).
Soit f une fonction continue sur $\varphi(I)$.
L'intégrale $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ converge si, et seulement si, l'intégrale $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\ \mathrm{d}t$ converge.
Dans ce cas, $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\ \mathrm{d}t$.

Exercice 9 Calculer les intégrales généralisées suivantes

(1) $I = \int_0^{\pi/2} \cos t \ln(\sin t)\ \mathrm{d}t$ (poser $x = \sin t$) (2) $I = \int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t$ (poser $x = \sqrt{1-t}$)

Conséquence • Soit f une fonction continue et paire sur $]-a,a[$.
L'intégrale généralisée $\int_{-a}^a f(t)\ \mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\int_0^a f(t)\ \mathrm{d}t$ converge.
Dans ce cas, $\int_{-a}^a f(t)\ \mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\ \mathrm{d}t$.

• Soit f une fonction continue et impaire sur $]-a,a[$.
L'intégrale généralisée $\int_{-a}^a f(t)\ \mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\int_0^a f(t)\ \mathrm{d}t$ converge.
Dans ce cas, $\int_{-a}^a f(t)\ \mathrm{d}t = 0$.

Preuve En exercice.

4. Intégrale de Riemann

L'intégrale de Riemann est l'intégrale de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^r}$ $(r > 0)$ sur un intervalle de borne 0 ou $+\infty$.
Ces intégrales sont **hors programme** mais interviennent souvent dans les problèmes.
Il est donc utile de savoir faire cet exercice.

Exercice 10 (1) Étudier l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^r}$.

(2) Étudier l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^r}$.

Que peut-on dire de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^r}$?

5. L'intégrale de Gauss

L'intégrale de Gauss $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ intervient en probabilités avec la loi normale centrée réduite.

Proposition 8 L'intégrale de Gauss $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ est convergente et $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$.

Preuve à faire en exercice :

1) Justifier que I est convergente si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

2) En utilisant le théorème de comparaison, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

3) Conclure

On admet que : $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$ (démonstration hors programme)

Exercice 11 Calculer les intégrales $J = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ et $K = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$.