Intégrales généralisées

Ce qu'il faut connaître :

-toutes les primitives usuelles
-les techniques de calcul de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment (intervalle fermé borné)
-la définition de la convergence de l'intégrale d'une fonction continue sur $[a,b[$ ($]a,b]$) impropre en b (a)
-la définition de la convergence de l'intégrale d'une fonction continue sur $]a,b[$ impropre en a et en b
-les propriétés des intégrales généralisées (relation de Chasles, linéarité, positivité, croissance)
-le critère de convergence par comparaison de fonctions positives
-le critère de convergence par l'absolue convergence
-les techniques de calcul d'une intégrale généralisée (primitive, IPP, changement de variable)

1. Comment étudier la nature d'une intégrale généralisée $\int_{\mathrm{I}} f(t)\,\mathrm{d}t$ où $\mathrm{I} = [a,b[$ (resp. $]a,b]$)

a. Si f est prolongeable par continuité sur $[a,b]$ alors $\int_{\mathrm{I}} f(t)\,\mathrm{d}t$ est faussement impropre

b. Si on sait trouver une primitive F de f sur I alors on étudie $\lim\limits_{x\to b^-} F(x)$ (resp. $\lim\limits_{x\to a^+} F(x)$)

$\int_{\mathrm{I}} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente si, et seulement si, cette limite existe et est finie

c. Si f est positive sur I alors on la compare à une fonction g dont on connait la nature de l'intégrale :
si $\int_{\mathrm{I}} g(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et si $\forall t \in \mathrm{I},\ 0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$ alors $\int_{\mathrm{I}} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente
si $\int_{\mathrm{I}} g(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente et si $\forall t \in \mathrm{I},\ 0 \leqslant g(t) \leqslant f(t)$ alors $\int_{\mathrm{I}} f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente

d. Si f est négative sur I alors $-f$ est positive sur I et le c. s'applique à $-f$

e. Si f n'est pas de signe constant sur I, on étudie la nature de $\int_{\mathrm{I}} |f(t)|\,\mathrm{d}t$
si $\int_{\mathrm{I}} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente alors $\int_{\mathrm{I}} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente (absolument)
si $\int_{\mathrm{I}} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est divergente alors on ne peut pas conclure avec ce critère !

f. Si $f(t)$ dépend d'un entier naturel n (de la forme $\int_{\mathrm{I}} f_n(t)\,\mathrm{d}t$)
alors on peut étudier la nature de l'intégrale grâce à une relation de récurrence (après IPP)

2. Comment étudier la nature d'une intégrale généralisée $\int_{\mathrm{I}} f(t)\,\mathrm{d}t$ où $\mathrm{I} =]a,b[$

a. Si f est prolongeable par continuité en a et b alors $\int_{\mathrm{I}} f(t)\,\mathrm{d}t$ est faussement impropre

b. Si $\int_{\mathrm{I}} f(t)\,\mathrm{d}t$ est impropre en a et en b on ne traite <u>jamais</u> les deux problèmes en même temps !
-on choisit un c dans $]a,b[$
-on étudie la nature de $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et de $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ (cf **1.**,la méthode peut être différente pour chaque !)
-si les deux intégrales $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes alors $\int_{\mathrm{I}} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente
si l'une des deux (ou les deux !) est divergente alors $\int_{\mathrm{I}} f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente

3. Comment calculer une intégrale généralisée $\int_{\mathrm{I}} f(t)\,\mathrm{d}t$

-On prouve que $\int_{\mathrm{I}} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente (cf **1.**) (on le fait éventuellement en même temps que le calcul)
-d'une manière générale
•si $\int_{\mathrm{I}} f(t)\,\mathrm{d}t$ est impropre en b
alors on calcule $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_{\mathrm{I}} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim\limits_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$
•si $\int_{\mathrm{I}} f(t)\,\mathrm{d}t$ est impropre en a
alors on calcule $\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_{\mathrm{I}} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim\limits_{x\to a^+} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$
•si $\int_{\mathrm{I}} f(t)\,\mathrm{d}t$ est impropre en a et en b
alors on calcule d'une part $\int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t$ puis $\lim\limits_{x\to a^+} \int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t$, d'autre part $\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ puis$\lim\limits_{x\to b^-} \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$
et $\int_{\mathrm{I}} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim\limits_{x\to a^+} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t + \lim\limits_{x\to b^-} \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$

a. Si on sait trouver une primitive F de f sur I :

•si $\int_I f(t)\,dt$ est impropre en b alors $\int_I f(t)\,dt = \lim_{x\to b^-} F(x) - F(a)$

•si $\int_I f(t)\,dt$ est impropre en a alors $\int_I f(t)\,dt = F(b) - \lim_{x\to a^+} F(x)$

•si $\int_I f(t)\,dt$ est impropre en a et en b alors $\int_I f(t)\,dt = \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x)$

b. À l'aide d'une intégration par parties

•si $\int_I f(t)\,dt$ est impropre en b

alors $\int_I f(t)\,dt = \lim_{x\to b^-} \int_a^x u(t)v'(t)\,dt = \lim_{x\to b^-} u(x)v(x) - u(a)v(a) - \lim_{x\to b^-} \int_a^x u'(t)v(t)\,dt$

•si $\int_I f(t)\,dt$ est impropre en a

alors $\int_I f(t)\,dt = \lim_{x\to a^+} \int_x^b u(t)v'(t)\,dt = u(b)v(b) - \lim_{x\to a^+} u(x)v(x) - \lim_{x\to a^+} \int_x^b u'(t)v(t)\,dt$

c. À l'aide d'un changement de variable et si on reconnait que $f(t) = u'(t)g(u(t))$

on pose $u = u(t)$ donc $du = u'(t)\,dt$

•si $\int_I f(t)\,dt$ est impropre en b alors $\int_I f(t)\,dt = \lim_{x\to b^-} \int_{u(a)}^{u(x)} g(u)\,du$

•si $\int_I f(t)\,dt$ est impropre en a alors $\int_I f(t)\,dt = \lim_{x\to a^+} \int_{u(x)}^{u(b)} g(u)\,du$

d. À l'aide d'un changement de variable et si on donne le changement de variable $u = \varphi(t)$

on doit trouver $t = \varphi^{-1}(u)$ et calculer $dt = (\varphi^{-1})'(u)\,du$

•si $\int_I f(t)\,dt$ est impropre en b alors $\int_I f(t)\,dt = \lim_{x\to b^-} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(x)} f(\varphi^{-1}(u))\,(\varphi^{-1})'(u)\,du$

•si $\int_I f(t)\,dt$ est impropre en a alors $\int_I f(t)\,dt = \lim_{x\to a^+} \int_{\varphi(x)}^{\varphi(b)} f(\varphi^{-1}(u))\,(\varphi^{-1})'(u)\,du$

4. Comment étudier et calculer une intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ si f est paire ou impaire

-$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente si, et seulement si, $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente

-si f est paire et $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente alors on calcule $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 2\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$

si f est impaire et $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente alors on calcule $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 0$

5. Comment étudier une fonction définie par une intégrale $f(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} g(t)\,dt$

-pour le domaine de définition

on détermine l'ensemble des x tels que g soit définie et continue sur $[a(x), b(x)]$ ou $[b(x), a(x)]$

-pour les variations, il faut toujours penser que $f(x) = G(b(x)) - G(a(x))$

où G est une primitive de g même si l'on ne sait pas la déterminer

-pour les limites aux bornes du domaine de définition

il s'agit toujours d'une intégrale généralisée que l'on étudie et calcule (cf. **1.**, **2**, .**3**, .**4**.)