Variables aléatoires à densité

I Notion de variable aléatoire réelle à densité

1. Densité de probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé.

Définition 1 On appelle densité de probablité ou densité, toute application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

• f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0$

• f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf, éventuellement, en un nombre fini de points

• l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ est convergente et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t = 1$

Exercice 1 les fonctions suivantes sont-elles des densités de probabilité ?

1- $f(x) = 3x^2$ si $x \in [0,1]$ et $f(x) = 0$ sinon

2- $f(t) = \dfrac{1}{2}e^{-|t|}$ sur $\mathbb{R}$.

Définition 2 On dit qu'une variable aléatoire réelle X est à densité si, et seulement s'il existe une densité de probabilité f telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t$.

Une telle fonction est appelée la densité de probabilité de la variable aléatoire X.

En général, f n'est pas unique.

2. Fonction de répartition

Définition 3 Soit X une variable à densité et f une densité de X.

la fonction de répartition de X est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Exercice 2 Déterminer les fonctions de répartition des densités de probabilité suivante :

1- $f(x) = 3x^2$ si $x \in [0,1]$ et $f(x) = 0$ sinon

2- $f(t) = \dfrac{1}{2}e^{-|t|}$ sur $\mathbb{R}$

Proposition 1 Soit F une fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

F est la fonction de répartition d'une variable à densité X si, et seulement si :

• F est continue sur $\mathbb{R}$

• F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf, éventuellement, en un nombre fini de points

• F croissante sur $\mathbb{R}$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$

Dans ce cas, on définit une densité f de X par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} F'(x) & \text{si } F \text{ est dérivable en } x \\ 0 \text{ (par exemple)} & \text{si } F \text{ n'est pas dérivable en } x \end{cases}.$$

Exercice 3 Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2+1} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$

Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Soit X une telle variable aléatoire. Déterminer une densité de X.

Proposition 2 Cas particulier des variables à densité paire

Soit X une variable de densité f et de fonction de répartition F.

Si f est paire alors $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = 1 - F(-x)$

Preuve $F(-x) = \int_{-\infty}^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

On effectue le changement de variable $u = -t,\ F(-x) = -\int_{+\infty}^{x} f(-u)\,\mathrm{d}u = \int_{x}^{+\infty} f(u)\,\mathrm{d}u$. car f est paire donc $F(-x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t - \int_{x}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1 - \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = 1 - F(x)$

3. Probabilté d'un événement lié à une variable aléatoire réelle à densité

Proposition 3 Soit X une variable aléatoire de densité de probabilité f et de fonction de répartition F alors :

•$\forall x \in \mathbb{R},\ P(X = x) = 0$

•$\forall x \in \mathbb{R},\ P(X \leqslant x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = F(x)$

•$\forall x \in \mathbb{R},\ P(X \geqslant x) = P(X > x) = \int_{x}^{+\infty} f(t)dt = 1 - F(x)$

•$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ P(a < X < b) = P(a \leqslant X < b) = P(a < X \leqslant b) = P(a \leqslant X \leqslant b)$

$$= \int_{a}^{b} f(t)dt = F(b) - F(a)$$

• Soit $I = \bigcup_{k=1}^{n} I_k$ une réunion finie de n intervalles deux à deux disjoints

$P(X \in I) = \sum_{k=1}^{n} P(X \in I_k) = \sum_{k=1}^{n} \int_{I_k} f(t)\,\mathrm{d}t$

Preuve • F est continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ P(X = x) = F(x) - \lim_{h\to 0} F(x-h) = 0$

Les variables à densité se différencient radicalement des variables discrètes car si X est une vard, $\forall x \in X(\Omega),\ P(X = x) \neq 0$

• $[X \leqslant x] = [X < x] \cup [X = x]$ donc $P(X \leqslant x) = P(X < x) + P(X = x) = P(X < x)$

• $P(X > x) = 1 - P(X \leqslant x) = 1 - F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$

• $[a < X \leqslant b] = [(X \leqslant b) \backslash (X \leqslant a)]$ donc

$P(a < X \leqslant b) = P(X \leqslant b) - P(X \leqslant a) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$

• simple application de la probabilité d'une réunion finie d'événements deux à deux disjoints

Définition 4 Soit X une variable à densité de densité f et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

On dit que <u>X est à valeurs dans I</u> ou que <u>I est le support de X</u> si, et seulement si, $P(X \in I) = 1$.

On a alors : $I = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$.

Si $I = [a,b]$ alors $\forall x \in]-\infty, a],\ F_X(x) = 0$ et $\forall x \in [b, +\infty[,\ F_X(x) = 1$.

Remarque Interprétation géométrique :

Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la densité f dans un repère (Ox, Oy).

Comme f est positive sur $\mathbb{R}$, une intégrale peut être interprétée comme une aire :

•$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1 \Leftrightarrow$ l'aire entre l'axe (Ox) et $\mathcal{C}_f$ sur $\mathbb{R}$ vaut 1

• $P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'aire entre l'axe (Ox) et $\mathcal{C}_f$ sur $]-\infty, x]$

• $P(a < X \leqslant b) = \int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'aire entre l'axe (Ox) et $\mathcal{C}_f$ sur $[a,b]$

Exercice 4 Soit $f(x) = \dfrac{a}{x+4}$ si $x \in [-3, 2]$ et $f(x) = 0$ sinon.

Déterminer le réel a pour que f soit une densité de probabilité.

Soit X une variable de densité f. Calculer $P(X^2 \geqslant 1)$.

4. Fonction quantile d'une variable aléatoire réelle à densité

La fonction quantile d'une variable aléatoire (ou d'une loi de probabilité) est la "récirpoque" de sa fonction de répartition. Quand cette fonction de répartition est strictement croissante, sa réciproque est définie sans ambigüité. Mais une fonction de répartition reste constante sur tout intervalle dans lequel la variable aléatoire ne peut pas prendre de valeurs. C'est pourquoi on introduit la définition suivante :

Définition 5 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$ et F_X sa fonction de répartition.
On appelle fonction quantile de X la fonction, notée Q_X, définie sur $]0,1[$ par :
$\forall u \in]0,1[,\ Q_X(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geqslant u\}$
Par convention, on pose $Q_X(0) = \inf(X(\Omega))$ la plus petite des valeurs prises par X
et $Q_X(1) = \sup(X(\Omega))$ la plus grande (elles sont éventuellement infinies).

Remarque Dans le cas de variables aléatoires à densité, on se place dans le cas fréquent où la densité f_X est strictement positive sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ (son support) et nulle ailleurs.
Si $I = [a,b]$, la fonction de répartition F_X est nulle sur $]-\infty,a]$, constante égale à 1 sur $[b,+\infty[$ et strictement croissante et continue sur $]a,b[$ donc elle réalise une bijection de $]a,b[$ vers $F_X(]a,b[) =]0,1[$.
Dans ce cas, la fonction quantile est définie par :
$Q_X(0) = a$, $Q_X(1) = b$ et $\forall u \in]0,1[,\ Q_X(u) = F_X^{-1}(u)$.
On étend facilement cette remarque au cas où a ou b est infini.

II Variable aléatoire fonction d'une variable aléatoire réelle à densité

1. Introduction

Soit X une variable de densité f et h une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On pose $Y = h(X)$. Dans les énoncés, il sera toujours admis que Y est une variable aléatoire mais il faudra se poser la question du type (discrète ou à densité).
En pratique, on procède de la façon suivante :
- On détermine l'univers image $Y(\Omega)$ ou le support de Y.
- Si $Y(\Omega) = \{y_i \mid i \in I\}$ est fini ou infini dénombrable alors Y est une variable discrète.
  On détermine sa loi en calculant, pour tout i de I, $P(Y = y_i)$
- Si $Y(\Omega)$ n'est pas un sous-ensemble discret de $\mathbb{R}$ alors Y est à densité.
  On détermine $P(Y \leqslant x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et on pose $F(x) = P(Y \leqslant x)$.
  On vérifie que F est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (sauf, éventuellement, en un nombre fini de points).
  On en déduit que F est la fonction de répartition de Y et on définit une densité f de Y en dérivant F en les points où F est dérivable.

Exercice 5 Soit X une var à densité, F sa fonction de répartition et f une densité de X.
Soit $Y = e^X$. Déterminer une densité de Y.

2. Fonction affine d'une variable à densité

Proposition 4 Soit X une variable de densité f à valeurs dans un intervalle I, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a \neq 0$.
Alors $Y = aX + b$ est une variable admettant une densité g définie par :
$\forall y \in \mathbb{R},\ g(y) = \dfrac{1}{|a|} f\left(\dfrac{y-b}{a}\right)$

Preuve À faire en exercice

3. Exemples de cas où la fonction h est une puissance entière

Soit X une variable de densité f

• On pose $Y = X^2$

Montrer que la fonction f_Y définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

est une densité de Y.

• On pose $Z = X^3$.

Montrer que la fonction f_Z définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_Z(x) = \dfrac{f(\sqrt[3]{x})}{3\sqrt[3]{x^2}}$ est une densité de Z.

III Moments d'une variable aléatoire réelle à densité

1. Définition

Définition 6 Soit X une variable aléatoire réelle à densité de densité f et r un entier naturel non nul.
On dit que X admet un moment d'ordre r si, et seulement si, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t)\ \mathrm{d}t$ est absolument convergente.
Dans ce cas, le moment d'ordre r de la variable aléatoire X est le réel $m_r(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t)\ \mathrm{d}t$.

Exercice 6 Soit X la variable aléatoire de densité f définie par $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{2}{x^3}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \in [1,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Montrer que f est bien une densité et calculer le moment d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$ s'il existe.

Proposition 5 Soit X une variable aléatoire réelle à densité et r un entier naturel non nul.
Si X admet un moment d'ordre r alors pour tout entier $s \leqslant r$, X admet un moment d'ordre s.

Preuve $\forall s \in [\![1,r]\!],\ \forall t \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[,\ 0 \leqslant |t^s f(t)| \leqslant |t^r f(t)|$
Or $\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t)\ \mathrm{d}t$ est absolument convergente donc $\int_{-\infty}^{+\infty} |t^r f(t)|\ \mathrm{d}t$ est convergente.
On en déduit que $\int_1^{+\infty} |t^r f(t)|\ \mathrm{d}t$ et $\int_{-\infty}^{-1} |t^r f(t)|\ \mathrm{d}t$ sont convergentes donc $\int_1^{+\infty} |t^s f(t)|\ \mathrm{d}t$ et $\int_{-\infty}^{-1} |t^s f(t)|\ \mathrm{d}t$ aussi c'est-à-dire que $\int_1^{+\infty} t^s f(t)\ \mathrm{d}t$ et $\int_{-\infty}^{-1} t^s f(t)\ \mathrm{d}t$ sont absolument convergentes.
De plus, $\forall t \in [-1,1],\ |t^s f(t)| \leqslant |f(t)| = f(t)$ or $\int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t$ est convergente donc $\int_{-1}^{1} |t^s f(t)|\ \mathrm{d}t$ est convergente. Finalement $\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t)\ \mathrm{d}t$ est absolument convergente.

2. Espérance mathématique

Définition 7 Soit X une variable aléatoire réelle à densité de densité f.
On dit que X admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\ \mathrm{d}t$ est absolument convergente.
Dans ce cas, l'espérance de X est le réel $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\ \mathrm{d}t$.

Remarque Si le support de X est un intervalle $I = [a,b]$ (fermé borné) alors X admet toujours une espérance car $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b t f(t)\ \mathrm{d}t$ n'est pas impropre.

Exercice 7 Vérifier que f est une densité puis calculer l'espérance éventuelle de la variable X de densité f :

1- $f(x) = 6x(1-x)$ si $x \in [0,1]$ et $f(x) = 0$ sinon

2- $f(x) = \dfrac{1}{\pi(x^2+1)}$

3. Théorème de transfert

Proposition 6 Soit X une variable de densité f à valeurs dans un intervalle I de $\mathbb{R}$

Soit h une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue sur I sauf éventuellement un nombre fini de points.

On pose $Y = h(X)$.

Si Y est une variable à densité alors elle admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\int_I h(t)f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

Dans ce cas, $E(Y) = \int_I h(t)f(t)\,\mathrm{d}t$.

Remarque Si $h(t) = t^r$, X admet un moment d'ordre r si, et seulement si, X^r admet une espérance.

Exercice 8 Soit X la variable de densité $f(x) = \dfrac{1}{\pi(x^2+1)}$ et $Y = \sin X$.

Déterminer l'éventuelle espérance de la variable Y.

Proposition 7 Soit X une variable de densité f admettant une espérance $E(X)$.

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $Y = aX + b$ admet une espérance et $E(Y) = aE(X) + b$.

Preuve •Si $a = 0$ alors Y est la variable certaine égale à b dont l'espérance est $E(y) = b$

•Si $a > 0$ alors Y est la variable de densité g définie par : $\forall y \in \mathbb{R},\ g(y) = \dfrac{1}{|a|}f\left(\dfrac{y-b}{a}\right)$

D'où $\int_{-\infty}^{+\infty}|tg(t)|\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}|t|f\left(\dfrac{t-b}{a}\right)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty}|au+b|f(u)\,\mathrm{d}u$.

Comme $|au+b|f(u) \leqslant a|u|f(u) + bf(u)$ et comme X admet une espérance $\int_{-\infty}^{+\infty}|u|f(u)\,\mathrm{d}u$ est convergente donc, par comparaison, $\int_{-\infty}^{+\infty}|tg(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente.

De plus, $\int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} tf\left(\dfrac{t-b}{a}\right)\mathrm{d}t = a\int_{-\infty}^{+\infty} uf(u)\,\mathrm{d}u + b\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\mathrm{d}u = aE(X) + b$

•Si $a < 0$, on procède de même

Définition 8 Soit X une variable à densité admettant une espérance $E(X)$.

Si $E(X) = 0$ alors on dit que <u>X est une variable centrée</u>.

$X - E(X)$ est <u>la variable centrée associée à X</u>.

Proposition 8 Soit X et Y deux variables à densité admettant une espérance.

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $aX + bY$ admet une espérance et $E(aX+bY) = aE(X) + bE(Y)$.

De plus, si $X \leqslant Y$ presque sûrement, c'est-à-dire $P(X \leqslant Y) = 1$, alors $E(X) \leqslant E(Y)$.

Ces deux résultats sont une conséquence immédiate de la linéarité et de la positivité de l'intégrale.

4. Variance et écart-type

Definition 9 Soit X une variable à densité admettant une espérance $E(X)$.

On dit que <u>X possède une variance</u> $V(X)$ si, et seulement si, la variable $(X - E(X))$ possède un moment d'ordre 2.

Dans ce cas, <u>la variance de X</u> est le réel $V(X) = E[(X - E(X))^2]$.

Proposition 9 Formule de Koenig-Huygens : Soit X une variable à densité.
X admet une variance si, et seulement si, X admet un moment d'ordre 2.
Dans ce cas , $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

Preuve •Si X admet un moment d'ordre 2 alors X admet un moment d'odre 1 c'est-à-dire une espérance.
Comme $(X - E(X))^2 = X^2 - 2E(X)X + E(X)^2$, $(X - E(X))^2$ admet une espérance donc X admet une variance.
De plus $E[(X - E(X))^2] = E[X^2 - 2E(X)X + E(X)^2] = E(X^2) - E(X)^2$.
• Réciproquement, si X admet une variance alors $(X - E(X))$ possède un moment d'ordre 2 donc $(X - E(X))$ et $(X - E(X))^2$ admettent une espérance.
Comme $(X - E(X))^2 = X^2 - 2E(X)X + E(X)^2$, $X^2 = (X - E(X))^2 + 2E(X)X - E(X)^2$ admet une espérance. Donc X admet un moment d'ordre 2.

Exercice 9 Soit X la variable de densité $f(x) = 6x(1 - x)$ si $x \in [0, 1]$ et $f(x) = 0$ sino,.
Déterminer la variance éventuelle de la variable X.

Proposition 10 Soit X une variable à densité admettant une variance $V(X)$.
• pour tout couple (a, b) de réels, $aX + b$ admet une variance et $V(aX + b) = a^2V(X)$
• $V(X) > 0$

Preuve •$(aX + b - E(aX + b))^2 = a^2(X - E(X))^2$ donc si X admet une variance, $a^2(X - E(X))^2$ admet une espérance et $E[(aX + b - E(aX + b))^2] = E[a^2(X - E(X))^2] = a^2E[(X - E(X))^2] = a^2V(X)$
•Il est clair que $V(X) \geqslant 0$. Si $V(X) = 0$ alors $\int_{-\infty}^{+\infty}(t - E(X))^2f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
Comme $t \mapsto (t - E(X))^2f(t)$ est positive, $\int_{-\infty}^{+\infty}(t - E(X))^2f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \Rightarrow (t - E(X))^2f(t) = 0$ sur $\mathbb{R}$.
D'où $f(t) = 0$ sauf, éventuellement, en $t = E(X)$, par suite $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ ce qui contredit la défintion d'une densité donc $V(X) > 0$.

Définition 10 Soit X une variable à densité admettant une variance $V(X)$.
L'écart-type de X est le réel strictement positif noté $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.
Si $\sigma(X) = 1$ ($\Leftrightarrow V(X) = 1$) alors on dit que X est une variable réduite.
La variable $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est appelée la variable centrée réduite associée à X.

IV Les lois usuelles

1. Loi uniforme sur un segment de longueur non nulle

Définition 15 Soit a et b deux réels tels que $a < b$.
Une variable X suit la loi uniforme sur $[a, b]$ si elle admet pour densité la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{. On note } X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b]).$$

Remarque • La loi uniforme sur $[a, b]$ modélise le choix au hasard dans l'intervalle $[a, b]$.
• On a bien $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \dfrac{\mathrm{d}t}{b-a} = 1$.

Simulation L'instruction `random()` de la bibliothèque `random` dans le langage Python permet de simuler une loi uniforme sur $[0, 1]$.

Proposition 11 Soit X une variable à densité de loi uniforme sur $[a,b]$ $(a<b)$

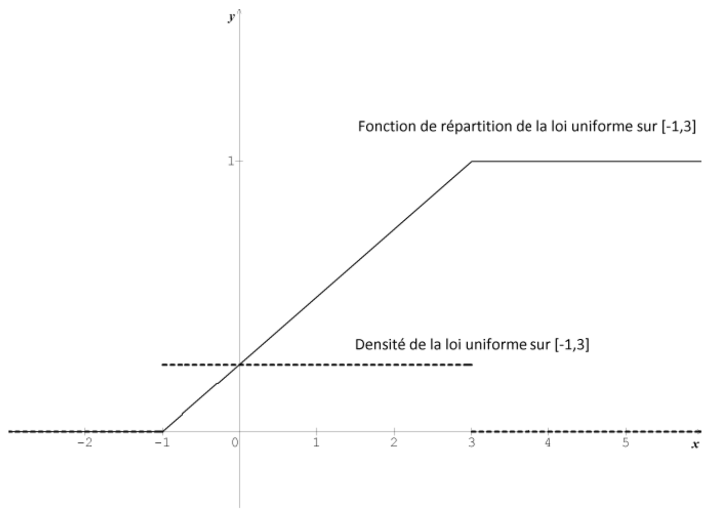
La fonction de répartition de X est définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$.

Preuve à faire en exercice

Proposition 12 Soit a et b deux réels tels que $a < b$.
Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$ alors $\forall (x,y) \in [a,b]^2,\ P(x \leqslant X \leqslant y) = \dfrac{y-x}{b-a}$

Preuve à faire en exercice

Représentation graphique



Remarque La fonction quantile est définie par $\forall u \in [0,1],\ Q_X(u) = (b-a)u + a$.

Remarque Soit a et b deux réels tels que $a < b$.
Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$ alors X admet un moment de tout ordre et $\forall r \in \mathbb{N}^*$, $m_r(X) = \dfrac{1}{r+1}\dfrac{b^{r+1}-a^{r+1}}{b-a}$.

Proposition 13 En particulier $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ et $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Preuve $\bullet m_r(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \dfrac{t^r}{b-a}\mathrm{d}t = \dfrac{1}{b-a}\left[\dfrac{t^{r+1}}{r+1}\right]_a^b = \dfrac{1}{r+1}\dfrac{b^{r+1}-a^{r+1}}{b-a}$.

$\bullet E(X) = m_1(X) = \dfrac{1}{2}\dfrac{b^2-a^2}{b-a} = \dfrac{a+b}{2}$.

$\bullet E(X^2) = m_2(X) = \dfrac{1}{3}\dfrac{b^3-a^3}{b-a} = \dfrac{b^2+ab+a^2}{3}$ donc

$V(X) = \dfrac{b^2+ab+a^2}{3} - \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 = \dfrac{4(b^2+ab+a^2)-3(a^2+2ab+b^2)}{12} = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

2. Loi exponentielle

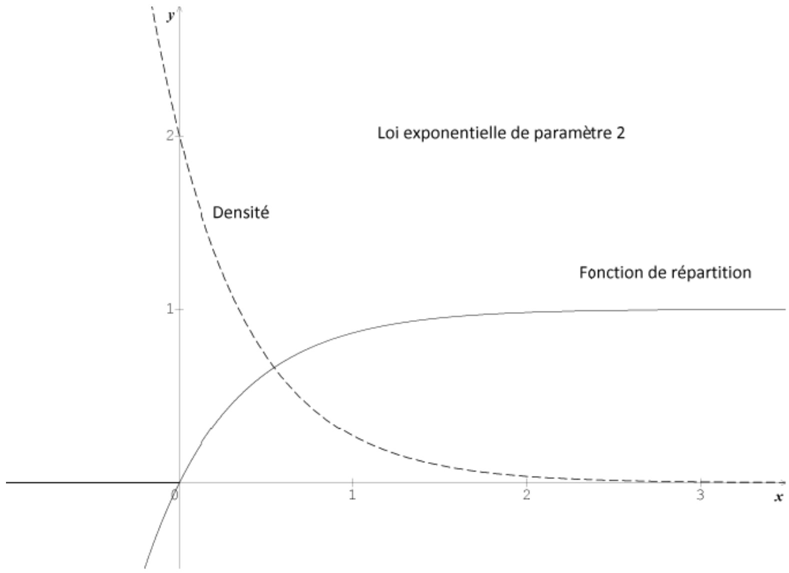
Définition 16 Soit λ un réel strictement positif.
Une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ si, et seulement si, X admet pour densité la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f(x) = \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}. \text{ On note } X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda),$$

Remarque • on a bien $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = [-e^{-\lambda t}]_0^{+\infty} = 1$.

• La fonction de répartition est définie par : $\begin{cases} F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \text{ si } x \geqslant 0 \\ F(x) = 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$.

Représentation graphique



Remarque La fonction quantile est définie par $\forall u \in [0,1[,\ Q_X(u) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-u)$.

Simulation On en déduit une simulation d'une variable aléatoire X de loi exponentielle :

```
def X(ℓ) :
    return −log(rd.random())/ℓ
```

Il est inutile de calculer $-\log(1 - \text{rd.}\texttt{random}())/\ell$ car `random` et $1 -$`random()` ont même loi.

Remarque Soit $\lambda > 0$.
Si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ alors X admet un moment de tout ordre et $\forall n \in \mathbb{N}, m_n(X) = \frac{n!}{\lambda^n}$.

Proposition 14 En particulier $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ et $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

Preuve •Soit $n \in \mathbb{N}$. $m_n(X) = \lambda \int_0^{+\infty} t^n e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$ est impropre en $+\infty$.
Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t^n e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t/2}} = 0$, $\exists A > 0$ tel que $\forall t \geqslant A,\ t^n e^{-\lambda t} \leqslant e^{-\lambda t/2}$.
Soit $x \geqslant A$, $\int_A^x e^{-\lambda t/2}\,\mathrm{d}t = -\frac{2}{\lambda}[e^{-\lambda t/2}]_A^x = \frac{2}{\lambda}(e^{-\lambda A/2} - e^{-\lambda x/2})$.
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{\lambda}(e^{-\lambda A/2} - e^{-\lambda x/2}) = \frac{2}{\lambda}e^{-\lambda A/2}$, l'intégrale $\int_A^{+\infty} e^{-\lambda t/2}\,\mathrm{d}t$ est convergente
et, par comparaison des intégrales de fonctions positives, $\int_A^{+\infty} t^n e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.
On en déduit que $\int_0^{+\infty} t^n e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$ est convergente et X admet un moment d'ordre n.
•Par intégration par parties, $m_n(X) = \lambda \int_0^{+\infty} t^n e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = [-t^n e^{-\lambda t}]_0^{+\infty} + n\int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{n}{\lambda} m_{n-1}(X)$.
Par une récurrence évidente, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}, m_n(X) = \frac{n!}{\lambda^n}$ car $m_0(X) = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\gamma t}\,\mathrm{d}t = 1$.
Pour $n = 1$, $m_1(X) = E(X) = \frac{1}{\lambda}$.
Pour $n = 2$, $m_2(X) = E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}$ donc $V(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$.

Exercice 10 Soit $\lambda > 0$ et $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^{+2}$.
Calculer $P(X > x)$ et montrer que : $P_{[X>x]}(X > x + y) = P(X > y)$.

3. Loi normale de Laplace-Gauss

i. Densité de la loi normale

Définition 17 Soit μ un réel et σ un réel strictement positif.
Une variable aléatoire X suit la loi normale de paramètres μ et σ^2 si, et seulement si, X admet pour densité la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$ On note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

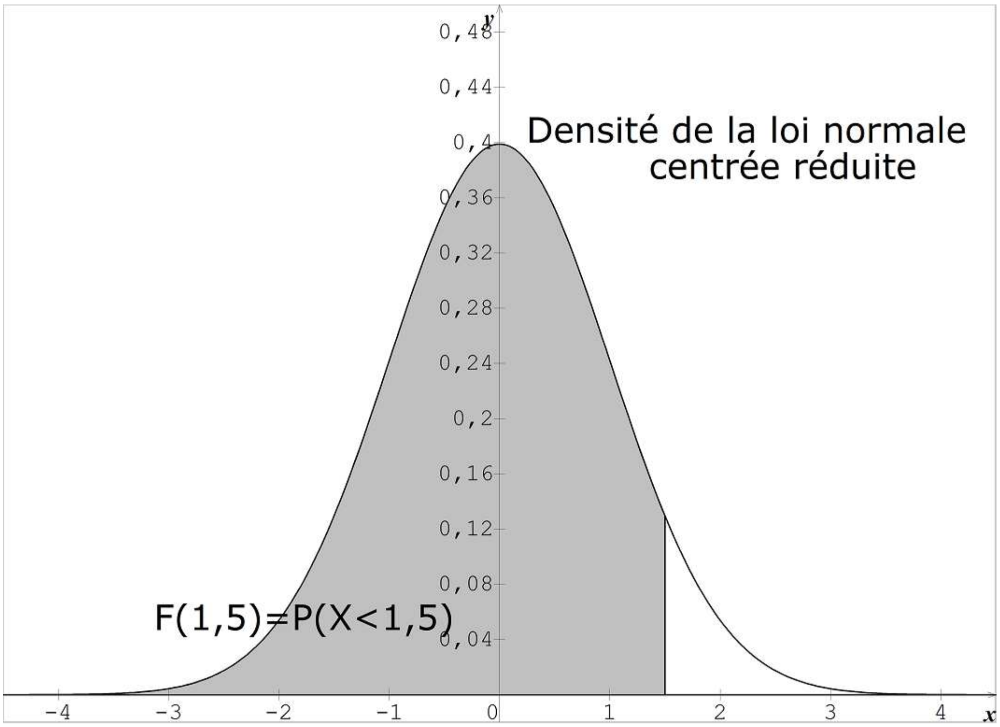
En particulier, une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite si X admet pour densité la fonction φ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$ On note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

Remarque • $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = 1$ où $u = \frac{t-\mu}{\sigma}$.

• La fonction de répartition est définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t$.

Représentation graphique Pour la densité $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, φ est paire, $\varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0,40$, point d'inflexion en $(\pm 1, \frac{1}{\sqrt{2\pi e}} \approx 0,24)$, asymptote $y = 0$



Proposition 15 Soit a et b deux réels, $a \neq 0$.
Si X suit une loi normale alors $aX+b$ suit une loi normale.

Preuve Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, sa densité est $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

Soit $Y = aX+b$ alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_Y(x) = \dfrac{1}{|a|} f_X\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f_Y(x) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{x-b}{a}\right) = \frac{1}{|a|\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{\left(\frac{x-b}{a}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{|a|\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{(x-a\mu-b)^2}{2(a\sigma)^2}}$$

On a bien $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(a\mu+b, (a\sigma)^2)$.

Remarque En particulier, pour $a = \dfrac{1}{\sigma}$ et $b = -\dfrac{\mu}{\sigma}$, $X^* = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

Et réciproquement, si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, sa densité est $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{x^2}{2}}$

alors la densité de $Y = \sigma X + \mu$ est $g(x) = \dfrac{1}{\sigma} f\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

donc $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$.

ii. Espérance et variance de la loi normale

Remarque Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ alors X admet un moment de tout ordre
et $\forall n \in \mathbb{N}$, $m_{2n+1}(X) = 0$ et $m_{2n}(X) = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$.

Proposition 16 • Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ alors X admet une espérance et une variance :
$E(X) = 0$ et $V(X) = 1$ (la loi $\mathcal{N}(0,1)$ est centrée et réduite !).

•Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ alors X admet une espérance et une variance :
$E(X) = \mu$ et $V(X) = \sigma^2$.

Preuve • soit $n \in \mathbb{N}$.

Comme $t \mapsto t^n e^{-t^2/2}$ a la même parité que n, on étudie la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$:

$\forall t \geqslant 1$, $t^n e^{-t^2/2} \leqslant t^n e^{-t/2}$ or $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t/2}\,\mathrm{d}t$ est le moment d'ordre n d'une variable de loi exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{2}$ donc $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t/2}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Par comparaison des intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

On en déduit que X admet un moment d'ordre n.

On a alors, $m_{2n}(X) = \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$ et $m_{2n+1}(X) = 0$.

• Pour calculer $I_{2n} = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$, on effectue une intégration par parties :

$I_{2n} = [-t^{2n-1}e^{-t^2/2}]_0^{+\infty} + \displaystyle\int_0^{+\infty} (2n-1)t^{2n-2}e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = (2n-1)I_{2(n-1)}$

D'où $I_{2n} = (2n-1)I_{2(n-1)} = (2n-1)(2n-3)I_{2(n-2)} = \cdots = (2n-1)(2n-3)\cdots 3.1.I_0$.

Comme $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$ on a $m_{2n}(X) = \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{(2n)!}{2^{n-1}n!}\sqrt{2\pi}$.

On a bien $m_{2n}(X) = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$.

• Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors $X = \sigma X^* + \mu$ où $X^* \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

alors $X^n = (\sigma X^* + \mu)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sigma^k X^{*k} \mu^{n-k}$.

Comme X^* possède un moment de tout ordre, X^{*k} possède une espérance.

Par linéarité de l'espérance, on en déduit que X^n possède une espérance donc X possède un moment d'ordre n.

De plus $E(X) = E(\sigma X^* + \mu) = \sigma E(X^*) + \mu = \mu$

$V(X) = V(\sigma X^* + \mu) = \sigma^2 V(X^*) = \sigma^2$.

iii. Fonction de répartition et fonction des quantiles de la loi normale centrée réduite

Proposition 17 On note φ la densité de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ et Φ sa fonction de répartition.

$\bullet \forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ et $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t$

$\bullet \forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

$\bullet \Phi(0) = \frac{1}{2}$

$\bullet \forall x \in \mathbb{R}^+,\ P(|X| \leqslant x) = 2\Phi(x) - 1$ et $P(|X| \geqslant x) = 2(1 - \Phi(x))$

Preuve • C'est la définition

$\bullet \varphi$ est paire. Avec le changement de variable $u = -t$, on obtient :

$$\Phi(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{+\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\, \mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, \mathrm{d}u = 1 - \Phi(x)$$

• Comme $\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, pour $x = 0$ on obtient $\Phi(0) = 1 - \Phi(0)$ donc $\Phi(0) = \frac{1}{2}$

$\bullet \forall x \in \mathbb{R}^+,\ P(|X| \leqslant x) = P(-x \leqslant X \leqslant x) = \Phi(x) - \Phi(-x) = \Phi(x) - (1 - \Phi(x) = 2\Phi(x) - 1$

$P(|X| \geqslant x) = 1 - P(|X| \leqslant x) = 1 - (2\Phi(x) - 1) = 2(1 - \Phi(x))$

Remarque La fonction Φ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\lim_{x \to -\infty} \Phi(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} \Phi(x) = 1$ donc Φ est bijective de $\mathbb{R}$ vers $]0,1[$.

Définition 18 La <u>fonction des quantiles de la loi normale centrée réduite</u> est la fonction réciproque de sa fonction de répartition Φ. On la note $\alpha \mapsto U_\alpha$ donc $\forall \alpha \in]0,1[,\ U_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$.

Proposition 18 $\bullet \Phi^{-1}$ est définie, continue et strictement croissante sur $]0,1[$

$\bullet \lim_{x \to 0^+} \Phi^{-1}(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to 1^-} \Phi^{-1}(x) = +\infty$

$\bullet \forall \alpha \in]0,1[,\ \forall u \in \mathbb{R},\ U_\alpha = u \Leftrightarrow \alpha = \Phi(u) = P(X \leqslant u)$ où $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

Remarque La fonction quantile de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ est un moyen de décrire la dispersion de la loi normale centrée réduite.

Si on réalise un grand nombre de tirages indépendants de même loi centrée réduite (un échantillon), on doit s'attendre à ce qu'une proportion α des valeurs soient inférieures à U_α.

Les fonctions quantiles sont souvent utilisées en statistiques. On calcule en particulier fréquemment des intervalles de dispersion, devant contenir une forte proportion des données. Soit $\alpha \in]0,1[$, on appelle intervalle de dispersion de niveau $1 - \alpha$ tout intervalle de la forme : $[U_\beta, U_{1-\alpha+\beta}]$ avec $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha$

Il faut lire α comme "une faible proportion" et $1 - \alpha$ comme "une forte proportion". Un intervalle de dispersion de niveau $1 - \alpha$ pour une var $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ est tel que X appartient à cet intervalle avec probabilité $1 - \alpha$, il contient donc une forte proportion de la densité.

iv. Utilisation de Python, de la table ou d'une calculatrice

Avec le langage Python :

Après avoir importé `norm`, par exemple au moyen de `from scipy.stats import norm`

•la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite : `norm.cdf()` (cumulative density function)

•la densité de la loi normale centrée réduite : `norm.pdf()` (probability density function)

•la réciproque de la fonction de répartition (fonction des quantiles, notée U) : `norm.ppf()` (percent point function)

Avec la table de la loi normale

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

• Lecture directe : si $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ alors $P(Z < 1,24)$ se lit à l'intersection de la ligne $1,2$ et de la colonne $0,04$: $P(Z < 1,24) = 0,8925$
de plus $P(Z > z) = 1 - P(Z < z)$ et $P(Z < -z) = P(Z > z)$ donc $P(Z > 1,24) = 0,1075$ et $P(Z < -1,24) = P(Z > 1,24) = 0,1075$

• Lecture inverse :
Cas des quantiles supérieurs à 50% d'une loi $\mathcal{N}(0,1)$
le quantile à 97, 5% pour la loi $\mathcal{N}(0,1)$ le nombre $a = U_{0,975}$ tel que $P(Z \leq a) = 0,975$.
$P(1,96) = 0,9750$, le quantile recherché est donc $U_{0,975} = 1,96$

Cas des quantiles inférieurs à 50% d'une loi $\mathcal{N}(0,1)$
le quantile à 14% pour la loi $\mathcal{N}(0,1)$ est le nombre $a = U_{0,14}$ tel que $P(Z \leq a) = 0,14$.
Il n'y a pas de nombre $< 0,5$ dans la table mais $U_\alpha = -U_{1-\alpha}$ (car $\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$)
donc $U_{0,14} = -U_{0,86} = -1,08$

Avec une calculatrice TI :
Sélectionner le menu des distributions des lois de probabilités : 2nd + DISTR
•la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite : normalcdf
•la densité de la loi normale centrée réduite : normalpdf
•la réciproque de la fonction de répartition (fonction des quantiles, notée U) : invNorm
Pour calculer $P(a < X < b)$
Sélectionner normalcdf (ou normalFRép suivant les modèles)
Compléter les paramètres $a,\ b,\ \mu,\ \sigma$ (et non σ^2)
On ne peut pas calculer $P(a < X)$ ou $P(X < b)$
il suffit pour cela de calculer $P(a < X < 10^{99})$ ou $P(-10^{99} < X < b)$
Pour calculer $x = U_u$ tel que $P(X \leqslant x) = u$ pour $u \in]0,1[$
Sélectionner invNorm (ou FracNormale suivant les modèles)
Compléter les paramètres $u,\ \mu,\ \sigma$ (et non σ^2)

Avec une calculatrice CASIO :
Sélectionner le Mode STAT
Au bas de l'écran, sélectionner DIST puis NORM
•la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite : Ncd
•la densité de la loi normale centrée réduite : Npd
•la réciproque de la fonction de répartition (fonction des quantiles, notée U) : InvN
Pour calculer $P(a < X < b)$
Sélectionner Ncd
Compléter les paramètres Lower : a, Upper : b, σ (et non σ^2), μ
On ne peut pas calculer $P(a < X)$ ou $P(X < b)$
il suffit pour cela de calculer $P(a < X < 10^{99})$ ou $P(-10^{99} < X < b)$
Pour calculer $x = U_u$ tel que $P(X \leqslant x) = u$ pour $u \in]0,1[$
Sélectionner InvN
Compléter les paramètres Tail : Left, Area : u, σ (et non σ^2), μ

Exercice 11 1- $X \hookrightarrow \mathcal{N}(4,4)$. Donner une valeur approchée de $P(X \leqslant 6)$.
2-$X \hookrightarrow \mathcal{N}(3, 2.25)$. Déterminer x pour que $P(X \leqslant x) \leqslant 0,5$
3-$X \hookrightarrow \mathcal{N}(5,4)$. Donner une valeur approchée de $P(2,5 \leqslant X \leqslant 7,5)$.
4-$X \hookrightarrow \mathcal{N}(6,4)$, déterminer $a > 0$ pour que $P(6 - a \leqslant X \leqslant 6 + a) = 0,9$

V Sommes de variables aléatoires à densité indépendantes

1. Loi de la somme de deux variables aléatoires à densité indépendantes

Proposition 19 Soit (X,Y) un couple aléatoire à densité de densités respectives f_X et f_Y.
Si X et Y sont indépendantes alors $Z = X + Y$ est une variable aléatoire dont une densité est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_Z(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-t) f_Y(t)\ \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t)\ \mathrm{d}t$$

Cette fonction f_Z est appelée le produit de convolution de f_X et f_Y.

Remarque Ce résultat dont la démonstration est hors programme est toujours rappelé dans les énoncés.

Exercice 12 1- Soit X et Y deux variables indépendantes suivant toutes les deux la loi uniforme sur $[0,1]$. Déterminer une densité de $Z = X + Y$.

2- Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois exponentielles de paramètres respectifs λ et μ. Déterminer une densité de $Z = X + Y$.

2. Somme de deux variables aléatoires normales indépendantes

Proposition 20 Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires.
On suppose que $X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_1,\sigma_1^2)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_2,\sigma_2^2)$.
On suppose de plus que X et Y sont indépendantes.
Alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$

Preuve • Montrons-le d'abord pour le cas particulier où $X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(0,\sigma^2)$:
Soit $Z = X_1 + X_2$ et $z \in \mathbb{R}$.

$$f_Z(z) = (f_{X_1} * f_{X_2})(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(z-t) f_{X_2}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sigma 2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(z-t)^2/2} e^{-t^2/2\sigma^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{\sigma 2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(z^2-2zt+t^2)/2-t^2/2\sigma^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sigma 2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\sigma^2+1}{2\sigma^2}t^2 + zt - \frac{1}{2}z^2\right)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{\sigma 2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\sigma^2+1}{2\sigma^2}\left(t-\frac{\sigma^2 z}{\sigma^2+1}\right)^2 - \frac{z^2}{2(\sigma^2+1)}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{\sigma 2\pi}\exp\left(-\frac{z^2}{2(\sigma^2+1)}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\sigma^2+1}{2\sigma^2}\left(t-\frac{\sigma^2 z}{\sigma^2+1}\right)^2\right)\mathrm{d}t$$

On sait que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{2\pi}$.

On effectue alors le changement de variable $u = \sqrt{\frac{\sigma^2+1}{\sigma^2}}\left(t - \frac{\sigma^2 z}{\sigma^2+1}\right)$:

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sigma 2\pi}\exp\left(-\frac{z^2}{2(\sigma^2+1)}\right)\sqrt{\frac{\sigma^2}{\sigma^2+1}}\sqrt{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma^2+1}}\exp\left(-\frac{z^2}{2(\sigma^2+1)}\right)$$

On reconnait que Z suit bien la loi $\mathcal{N}(0,\sigma^2+1)$.

• Revenons au cas général où $X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_1,\sigma_1^2)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_2,\sigma_2^2)$
Soit $U = \frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1}$ et $V = \frac{X_2-\mu_2}{\sigma_1}$ alors $U \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et $V \hookrightarrow \mathcal{N}(0,\sigma^2)$ où $\sigma = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$.
U et V sont indépendantes.
D'après ce qui précède, $T = U + V \hookrightarrow \mathcal{N}(0,\sigma^2+1) = \mathcal{N}(0,\frac{\sigma_2^2+\sigma_1^2}{\sigma_1^2})$.
Comme $T = U + V = \frac{X_1+X_2-\mu_1-\mu_2}{\sigma_1}$ on a $Z = \sigma_1 T + \mu_1 + \mu_2$.
On en déduit que $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2\frac{\sigma_2^2+\sigma_1^2}{\sigma_1^2}) = \mathcal{N}(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$

Par récurrence, on montrerait la proposition :

Proposition 21 Soit n variables aléatoires indépendantes $X_1,\cdots,X_n$ telles que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_i,\sigma_i^2)$.
Alors la variable $\sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow \mathcal{N}(\sum_{i=1}^{n}\mu_i,\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2)$.

Exemple La somme de n variables indépendantes de loi normale centrée réduite est une variable de loi $\mathcal{N}(0,n)$.