Corrigé du Devoir Surveillé 4 - BCPST 2

Partie I - Évolution d'une population touchée par un virus

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Les personnes exposées au virus à l'instant $n+1$ correspondent aux personnes ayant rencontré un individu contagieux asymptomatique ou symptomatique. Par définition de F_1 et F_2,
$$\boxed{e_{n+1} = F_1 a_n + F_2 s_n.}$$
(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de p_1 et p_2 :
$$\boxed{a_{n+1} = p_1 e_n \text{ et } s_{n+1} = p_2 a_n.}$$
(c) On en déduit que :
$$\boxed{N_{n+1} = AN_n \text{ où } A = \begin{pmatrix} 0 & F_1 & F_2 \\ p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \end{pmatrix}.}$$

2. **Étude d'un exemple.**
On montre par récurrence que
$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ N_n = A^n N_0.}$$

3. **Réduction de la matrice A.**
(a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
$$\begin{aligned}
\lambda \text{ valeur propre de } A \quad &\Leftrightarrow \quad A - \lambda I \text{ non inversible} \Leftrightarrow \quad \mathrm{rg}(A-\lambda I) < 3 \\
&\Leftrightarrow \quad \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -\lambda & 13 & 12 \\ \frac{1}{4} & -\lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \end{pmatrix} < 3 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -\lambda & 13 & 12 \\ 1 & -4\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -2\lambda \end{pmatrix} < 3 \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 4L_2 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 \end{array} \\
&\Leftrightarrow \quad \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 13-4\lambda^2 & 12 \\ \boxed{1} & -4\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -2\lambda \end{pmatrix} < 3 \qquad L_1 \leftarrow L_1 + \lambda L_2 \\
&\Leftrightarrow \quad \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 13-4\lambda^2 & P(\lambda) \\ \boxed{1} & -4\lambda & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -2\lambda \end{pmatrix} < 3 \qquad L_1 \leftarrow L_1 + (4\lambda^2 - 13)L_3
\end{aligned}$$
où
$$P(\lambda) = 12 - 2\lambda(4\lambda^2 - 13) = -2(4\lambda^3 - 13\lambda - 6).$$
Ainsi $A - \lambda I$ n'est pas inversible ssi, λ est une racine de P, c'est-à-dire une racine de $Q = 4X^3 - 13X - 6$.
On remarque que : $Q(2) = 4 \times 8 - 13 \times 2 - 6 = 0$; $Q(-\frac{1}{2}) = \frac{-4}{8} + \frac{13}{2} - 6 = 0$.
Ainsi on peut factoriser Q pour chercher la dernière racine :
$$Q(X) = 4(X-2)(X+\tfrac{1}{2})(X-\alpha).$$
Lorsqu'on développe et qu'on ne s'intéresse qu'au terme constant, ce terme vaut : $4 \times (-2) \times (\frac{1}{2}) \times (-\alpha) = 4\alpha$.
Or il doit être égal à -6, donc : $\alpha = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$.
$$\boxed{A \text{ possède trois valeurs propres } \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -\tfrac{3}{2} \text{ et } \lambda_3 = -\tfrac{1}{2} \text{ qui sont telles que } \lambda_1 > |\lambda_2| \geqslant |\lambda_3|.}$$
Puisque A est une matrice carrée d'ordre 3 et que A possède trois valeurs propres distinctes :
$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ est diagonalisable.}}$$
(b) On utilise les calculs de la question précédente.
 - Pour $\lambda_1 = 2$:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_1} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} x - 8y & = 0 \\ y - 4z & = 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} x & = 32z \\ y & = 4z \\ z & = z \end{array} \right.$$

$$\boxed{E_{\lambda_1} = \text{Vect}(V_1) \text{ avec } V_1 = \begin{pmatrix} 32 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.}$$

- Pour $\lambda_2 = -\dfrac{3}{2}$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_2} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} x + 6y & = 0 \\ y + 3z & = 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} x & = 18z \\ y & = -3z \\ z & = z \end{array} \right.$$

$$\boxed{E_{\lambda_2} = \text{Vect}(V_2) \text{ avec } V_2 = \begin{pmatrix} 18 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.}$$

- Pour $\lambda_3 = -\dfrac{1}{2}$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_3} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} x + 2y & = 0 \\ y + z & = 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} x & = 2z \\ y & = -z \\ z & = z \end{array} \right.$$

$$\boxed{E_{\lambda_3} = Vect(V_3) \text{ avec } V_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.}$$

(c) Les vecteurs V_1, V_2, V_3 étant des vecteurs propres de A associés à des valeurs propres distinctes, la famille $\mathscr{B} = (V_1, V_2, V_3)$ est libre. De plus, $\text{Card}(\mathscr{B}) = 3 = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$,

$$\boxed{\text{donc } \mathscr{B} = (V_1, V_2, V_3) \text{ est une base de } \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}).}$$

4. **Comportement asymptotique de la population.**

(a) Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on montre par récurrence que pour tout entier naturel n, $A^n V_i = \lambda_i^n V_i$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$N_n \underset{2.}{=} A^n N_0 = A^n(c_1 V_1 + c_2 V_2 + c_3 V_3) = c_1 A^n V_1 + c_2 A^n V_2 + c_3 A^n V_3 \underset{4.(a)}{=} c_1 \lambda_1^n V_1 + c_2 \lambda_2^n V_2 + c_3 \lambda_3^n V_3.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ N_n = (\lambda_1)^n c_1 V_1 + (\lambda_2)^n c_2 V_2 + (\lambda_3)^n c_3 V_3.}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} N_n &= (\lambda_1)^n c_1 V_1 + (\lambda_2)^n c_2 V_2 + (\lambda_3)^n c_3 V_3 \\ &= (\lambda_1)^n \left(c_1 V_1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n c_2 V_2 + \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^n c_3 V_3 \right) \end{aligned}$$

Or $\lim \left(\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n = \lim \left(\dfrac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^n = 0$ car $\lambda_1 > |\lambda_2| \geqslant |\lambda_3|$ c'est-à-dire $\left|\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| < 1$ et $\left|\dfrac{\lambda_3}{\lambda_1}\right| < 1$.

En posant $E_n = \left(\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n c_2 V_2 + \left(\dfrac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^n c_3 V_3$, E_n est une matrice dont tous les coefficients ont pour limite 0 lorsque n tend vers $+\infty$ et telle que

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ N_n = (\lambda_1)^n (c_1 V_1 + E_n).}$$

(d) On en déduit que

$$\boxed{e_n \sim 32 c_1 2^n,\ a_n \sim 4 c_1 2^n \text{ et } s_n \sim c_1 2^n \text{ et } t_n \sim 37 c_1 2^n.}$$

Attention à ne pas faire une somme d'équivalents pour trouver un équivalent de t_n mais à bien partir de l'expression complète qui définit t_n.

D'où les limites :

$$\boxed{\lim \frac{e_n}{t_n} = \frac{32}{37},\ \lim \frac{a_n}{t_n} = \frac{4}{37} \text{ et } \lim \frac{s_n}{t_n} = \frac{1}{37}.}$$

(e) On constate que ces résultats ne dépendent pas de N_0, donc

$$\boxed{\text{ils ne dépendent pas de la répartition initiale dans les différentes classes.}}$$

(f) À long terme, la population en contact avec le virus considéré se répartira selon les rapports trouvés à la question précédente, à savoir $\frac{32}{37}^{\text{e}}$ de la population sera seulement exposée, $\frac{4}{37}^{\text{e}}$ de la population sera contagieuse asymptomatique et $\frac{1}{37}^{\text{e}}$ de la population sera contagieuse symptomatique.

Partie II - Calcul numérique d'un vecteur propre

1. On parcourt tous les coefficients de la matrice à l'aide de deux boucles `for` et on stocke dans la variable `max` la plus grande valeur absolue de coefficient rencontrée.

```python
def Norme(M):
    m, n = np.shape(M)
    max = abs(M[0,0])
    for i in range(m):
        for j in range(n):
            if abs(M[i,j]) > max:
                max = abs(M[i,j])
    return max
```

2. On utilise la fonction précédente et on renvoie la matrice `v` divisée par sa norme.

```python
def Normalise(v):
    return v/Norme(v)
```

3. On initialise la suite à l'aide de la fonction `v0` et on calcule le terme v_1. Tant que la norme de la différence de deux termes consécutifs est strictement supérieure à ε, on calcule les termes suivants.

```python
def VecteurPropre(A,eps):
    p = np.shape(A)[0]
    v = v0(p)
    w = Normalise(np.dot(A,v))
    while Norme(v-w) > eps:
        v, w = w, Normalise(np.dot(A,w))
    return w
```

4. (a) On crée une matrice nulle de la bonne taille et on remplace ses colonnes par v et w.

```python
def matrice(v,w):
    d = np.shape(v)[0]
    M = np.zeros((p,2))
    M[:,0] = v
    M[:,1] = w
    return M
```

   (b) On crée la matrice dont les colonnes sont v et w. Ces deux vecteurs sont colinéaires si, et seulement si, le rang de cette matrice est strictement inférieur à 2.

```python
def colineaires(v,w):
    M = matrice(v,w)
    return la.matrix_rank(M) < 2
```

   (c) la matrice v est vecteur propre de A si, et seulement si, elle est non nulle et si Av et v sont colinéaires.

```python
def estVecteurPropre(A,v):
    return la.matrix_rank(v) != 0 and colineaires(v, np.dot(A,v))
```

   (d) En compilant le programme proposé, on obtient en général `False` car les composantes du vecteur v trouvé par la fonction `VecteurPropre(A,eps)` sont des valeurs approchées des composantes d'un vecteur propre de A, ce qui fait que v n'est en général pas un vecteur propre de A.

Partie III - Un modèle stochastique discret permettant de calculer une probabilité d'infection

1. (a) Soit $X = L + 1$ le numéro du premier individu non infecté. X est le rang d'apparition du premier individu non infecté dans une suite d'expériences identiques et indépendantes qui consistent à regarder si un individu contaminé ne contamine pas son voisin, ce qui arrive avec probabilité $1 - p$.
Donc X suit la loi géométrique de paramètre $1 - p$. On en déduit la loi de L :
$$\boxed{L(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{P}(L = n) = \mathrm{P}(X = n + 1) = p^n(1 - p).}$$
(b) X est une variable aléatoire qui admet une espérance car elle suit une loi géométrique. Or $L = X - 1$, donc L admet également une espérance et par linéarité de l'espérance :
$$\mathrm{E}(L) = \mathrm{E}(X) - 1 = \frac{1}{1-p} - 1 = \frac{p}{1-p}.$$
$$\boxed{L \text{ admet une espérance et } \mathrm{E}(L) = \frac{p}{1-p}.}$$
(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $I_n = (L \geqslant n) = \bigcup_{k=n}^{+\infty} (L = k)$, union d'événements deux à deux incompatibles. Par σ-additivité, la série $\sum_{k \geqslant n} \mathrm{P}(L = k)$ est convergente et :
$$\mathrm{P}(I_n) = \sum_{k=n}^{+\infty} p^k(1 - p) = p^n(1 - p) \times \frac{1}{1-p} = p^n.$$
$$\boxed{\text{Donc : } \forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{P}(I_n) = p^n.}$$
On peut aussi remarquer que $I_n = (L \geqslant n) = (X > n)$ et comme $X \hookrightarrow \mathscr{G}(1 - p)$, $\mathrm{P}(I_n) = \mathrm{P}(X > n) = p^n$.
(d) i. On utilise un compteur que l'on incrémente de 1 tant qu'il y a contamination du voisin dans la chaîne.
```python
def L(p):
    l = 0
    while rd.random() < p:
        l += 1
    return l
```
ii. Pour calculer une valeur approchée de $\mathrm{E}(L)$ on calcule à l'aide d'une boucle `for` la moyenne des valeurs de L obtenues pour 1000 simulations (loi faible des grands nombres).
```python
def esperanceL(p):
    n = 1000
    somme = 0
    for k in range(n):
        somme += L(p)
    return somme / n
```
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a
$$\mathrm{P}(C = n) \geqslant \mathrm{P}(C = n - 1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mu^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-\mu} \geqslant \frac{\mu^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{e}^{-\mu} \quad \underset{\mu \neq 0 \text{ et } \mathrm{e}^{-\mu} \neq 0}{\Leftrightarrow} \quad \mu \geqslant n.$$
$$\boxed{\mathrm{P}(C = n) \geqslant \mathrm{P}(C = n - 1) \Leftrightarrow \ \mu \geqslant n.}$$
(b) D'après la question précédente, la suite de valeurs $P(C = n)$ croît jusqu'à la valeur $\mathrm{P}(C = \mu)$.
$$\boxed{\text{Par lecture sur l'histogramme présenté, on trouve } \mu = 5.}$$
(c) D'après la formule des probabilités totales pour le système complet d'événements associé à la variable aléatoire C, la série $\sum_{n \geqslant 0} \mathrm{P}(C = n)\,\mathrm{P}_{(C=n)}(I)$ converge et :
$$\mathrm{P}(I) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}(C = n)\,\mathrm{P}_{(C=n)}(I) = P(C = 0)P_{(C=0)}(I) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(C = n)\,\mathrm{P}(I_n)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-\mu} \times p^n = \mathrm{e}^{-\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu p)^n}{n!} = \mathrm{e}^{-\mu}(\mathrm{e}^{\mu p} - 1).$$
$$\boxed{\text{Donc } \mathrm{P}(I) = \mathrm{e}^{-5}(\mathrm{e}^{5p} - 1).}$$

Partie IV - Un modèle stochastique discret permettant de quantifier la propagation de l'épidémie

1. N étant une variable aléatoire,

$$\boxed{\text{la série de terme général } p_n \text{ est positive, convergente et de somme 1.}}$$

2. **Cas particulier $a = 0$.**

   (a) Montrons ce résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

   Initialisation : (cas $n = 0$) $\dfrac{b^0}{0!}p_0 = p_0$.

   Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la propriété est vraie au rang n. Alors, $p_{n+1} = \dfrac{b}{n+1} \times \dfrac{b^n}{n!}p_0 = \dfrac{b^{n+1}}{(n+1)!}p_0$.

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad p_n = \frac{b^n}{n!}\, p_0.}$$

   (b) Détermination de p_0 :

   - pour $n \in \mathbb{N}$, $p_n \geqslant 0$ car $p_0 \geqslant 0$.
   - la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{P}(N = n)$ est une série exponentielle convergente et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(N = n) = p_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b^n}{n!} = p_0\, \mathrm{e}^b\,.$$

   N définit une variable aléatoire si, et seulement si, $p_0 = \mathrm{e}^{-b}$.

$$\boxed{\text{N suit alors la loi de Poisson de paramètre } b.}$$

3. *On souhaite montrer que $a + b > 0$.*

   (a) La relation de récurrence pour $n = 1$ donne : $p_1 = (a + b)p_0$. Le réel p_0 est non nul, sinon la suite (p_n) serait la suite nulle, d'où $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 0$, ce qui est absurde. Ainsi, $a + b = \dfrac{p_1}{p_0} \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{Donc : } a + b \geqslant 0.}$$

   (b) On suppose que $a + b = 0$. Cela signifie que nécessairement $p_1 = 0$, donc $p_n = 0$ pour tout $n \geqslant 1$.
   La série $\sum p_n$ est alors convergente et de somme 1 si, et seulement si $p_0 = 1$ ce qui contredit l'hypothèse de l'énoncé $p_0 < 1$.

$$\boxed{\text{Donc : } a + b > 0.}$$

4. *On souhaite montrer que $a < 1$.*
   Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant que $a \geqslant 1$.

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$p_{n+1} = \left(a + \frac{b}{n+1}\right) p_n = \frac{an + (a+b)}{n+1} p_n \geqslant \frac{n}{n+1} p_n \quad \text{car} \quad a \geqslant 1 \quad \text{et} \quad a + b \geqslant 0.$$

   (b) On montre alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n \geqslant \frac{p_1}{n}.}$$

   La série harmonique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ étant divergente, le théorème de comparaison des séries à termes positifs assure que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} p_n$ serait divergente, ce qui est absurde.

$$\boxed{\text{Conclusion : } a < 1.}$$

5. **Existence et calcul de l'espérance.**

   Le réel a étant strictement inférieur à 1, on considère α un réel positif tel que : $a < \alpha < 1$.

   (a) On sait que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a + \frac{b}{n+1} = a$.

$$\boxed{\text{Par définition de la limite, il existe un rang } n_0 \text{ à partir duquel : } a + \frac{b}{n+1} \leqslant \alpha.}$$

(b) On montre alors par récurrence sur $n \geqslant n_0$ que

$$\boxed{\forall\, n \geqslant n_0, \quad p_n \leqslant \alpha^{n-n_0} p_{n_0}.}$$

(c) La variable aléatoire N admet une espérance si, et seulement si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} np_n$ est absolument convergente c'est-à-dire convergente car il s'agit d'une série à termes positifs. Or :

$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad 0 \leqslant np_n \leqslant p_{n_0}\alpha^{1-n_0} \times n\alpha^{n-1}.$$

La série $\sum_{n\geqslant n_0} n\alpha^{n-1}$ est une série géométrique dérivée première convergente car $|\alpha| < 1$.
D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série tronquée $\sum_{n\geqslant n_0} np_n$ est convergente. Donc, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} np_n$ et convergente si bien que :

$$\boxed{\text{La variable aléatoire } N \text{ admet une espérance.}}$$

(d) De plus,

$$\mathrm{E}(N) = \sum_{n=0}^{+\infty} np_n = \sum_{n=1}^{+\infty} np_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)p_{n+1}.$$

Or,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad p_{n+1} = \left(a + \frac{b}{n+1}\right) p_n$$

Donc :

$$\mathrm{E}(N) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\left(a + \frac{b}{n+1}\right)p_n = \sum_{n=0}^{+\infty}(anp_n + (a+b)p_n) = a\mathrm{E}(N) + (a+b).$$

$$\boxed{\text{Donc : } \mathrm{E}(N) = a\mathrm{E}(N) + a + b}$$

(e) Étant donné que $a \neq 1$, on en déduit que :

$$\boxed{\mathrm{E}(N) = \frac{a+b}{1-a}.}$$

6. **Quantification de la propagation.**

(a) La variable aléatoire N correspond au nombre d'individus qui sont entrés en contact avec l'individu infecté. Pour chacun des ces individus numérotés par un entier $n \in [\![1, N]\!]$, la variable aléatoire X_n vaut 1 avec probabilité $\mathrm{P}(I)$ c'est-à-dire si l'individu n est infecté.

$$\boxed{\text{Donc la variables } S \text{ représente le nombre d'individus infectés.}}$$

(b) Dans la fonction mystère, on choisit au hasard un flottant `x` de l'intervalle $[0, 1]$ et on calcule dans la variable `F` les valeurs de la fonction de répartition de N en les entiers naturels `n` en partant de 0. Dès qu'on dépasse la valeur de `x` on renvoie la valeur de `n` correspondante.

$$\boxed{\text{Cette fonction permet donc de simuler la variable aléatoire } N.}$$

(c) On simule N avec la fonction `mystere`, puis à l'aide d'une boucle `for`, on simule N variables suivant la loi de Bernoulli de paramètre $\mathrm{P}(I)$ (calculé dans la **Partie III**) pour calculer la valeur de S.

```
def S(p,p0,a,b):
    N = mystere(p0,a,b)
    PI = np.exp(-5) * (np.exp(5*p)-1)
    s = 0
    for k in range(N):
        if rd.random() < PI:
            s += 1
    return s
```