Corrigé DM7

1. Comme A est une matrice carrée d'ordre 2, A est inversible $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.
Notons $\mathcal{I}$ l'événement ‹‹ A est inversible ››.
Comme $\det A = X^2 - Y^2$, $\mathcal{I} = [X^2 - Y^2 \neq 0] = [X - Y \neq 0]$ car X et Y sont positives.
À l'aide du système complet dévénements $([X = i])_{i\in\mathbb{N}^*}$, la formule des probabilités totales donne :
$P\left(\overline{\mathcal{I}}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P([X = n] \cap [Y = n]) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n)P(Y = n)$ par indépendance des variables X et Y.
Comme X et Y suivent la loi géométrique de paramètre p,
$P\left(\overline{\mathcal{I}}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left((1-p)^{n-1}p\right)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty}\left((1-p)^2\right)^{n-1}p^2.$
On reconnait la somme d'une série géométrique de raison $1 - p \in]0, 1[$
donc $P\left(\overline{\mathcal{I}}\right) = \dfrac{p^2}{1-(1-p)^2} = \dfrac{p}{2-p}$. On en déduit que $P(\mathcal{I}) = 1 - P\left(\overline{\mathcal{I}}\right) = 1 - \dfrac{p}{2-p}$.
Finalement, $\boxed{\text{la probabilité que la matrice } A \text{ soit inversible est égale à } P(\mathcal{I}) = \dfrac{2(1-p)}{2-p}}$.

2. **a.** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $\lambda \in spec(A) \Leftrightarrow A - \lambda I_3$ n'est pas inversible $\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_3) = 0$.
Or $\det(A - \lambda I_3) = (X-\lambda)^2 - Y^2 = (X + Y - \lambda)(X - Y - \lambda)$.
On en déduit que $\boxed{\text{les valeurs propres de } A \text{ sont } X + Y \text{ et } X - Y}$.

b. Comme X et Y sont strictement positives, $X + Y > X - Y$ donc $\boxed{M = X + Y \text{ et } m = X - Y}$.
On a $[M = m] = [X + Y = X - Y] = [Y = 0] = \varnothing$ car $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
On en conclut que $\boxed{P(M = m) = 0}$.

c. Comme X et Y admettent une espérance, M et m admettent une espérance et, par linéarité de l'espérance, $E(M) = E(X) + E(Y)$ et $E(m) = E(X) - E(Y)$.
Comme $E(X) = E(Y) = \dfrac{1}{p}$, $\boxed{E(M) = \dfrac{2}{p} \text{ et } E(m) = 0}$.

d. On simule les variables X et Y et on renvoie $M = X + Y$ et $m = X - Y$:

```
import random as rd
def geom(p):
    rg = 1
    while rd.random() > p:
        rg += 1
    return rg
def Mm(p):
    X, Y = geom(p), geom(p)
    return X+Y, X-Y
```

3. Comme $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $[M = 2] = [X = 1] \cap [Y = 1]$.
Par indépendance des événements $[X = 1]$ et $[Y = 1]$, $P(M = 2) = P(X = 1)P(Y = 1)$.
Comme $P(X = 1) = P(Y = 1) = p$, $\boxed{P(M = 2) = p^2}$.
Comme $[m = 0] = [X - Y = 0] = \overline{\mathcal{I}}$, $\boxed{P(m = 0) = \dfrac{p}{2-p}}$ d'après **1**.
Comme $[M = 2] \cap [m = 0] = [X = 1] \cap [Y = 1]$, $\boxed{P([M = 2] \cap [m = 0]) = p^2}$.
Comme $p \neq 1$, $\dfrac{p}{2-p} \neq 1$ et donc $P([M = 2] \cap [m = 0]) \neq P(M = 2)P(m = 0)$.
On en conclut que $\boxed{\text{les variables } M \text{ et } m \text{ ne sont pas indépendantes}}$.

4. **a.** Comme $M = X + Y$ et $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $\boxed{M(\Omega) = \left\{n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2\right\}}$.

b. Soit $n \geqslant 2$. $[M = n] = [X + Y = n] = \bigcup_{i=1}^{+\infty}([X = i] \cap [Y = n - i])$.

Or $[Y = n - i] = \varnothing$ si $n - i < 1$ donc $\boxed{\forall n \geqslant 2,\ [M = n] = \bigcup_{i=1}^{n-1}([X = i] \cap [Y = n - i])}$.

Comme les événements $[X = i] \cap [Y = n - i]$, $i \in \{1, \cdots, n - 1\}$ sont incompatibles, $P(M = n) = \sum_{i=1}^{n-1} P([X = i] \cap [Y = n - i])$.

Puis par indépendance des variables X et Y, $P(M = n) = \sum_{i=1}^{n-1} P(X = i)P(Y = n - i)$.

On en déduit que $P(M = n) = \sum_{i=1}^{n-1}(1 - p)^{i-1}p(1 - p)^{n-i-1}p = \sum_{i=1}^{n-1}(1 - p)^{n-2}p^2$.

Finalement, $\boxed{\forall n \geqslant 2,\ P(M = n) = (n - 1)(1 - p)^{n-2}p^2}$.

c. Pour tout $n \geqslant 2$, $|nP(M = n)| = n(n - 1)(1 - p)^{n-2}p^2$. On reconnait le terme général d'une série géométrique dérivée seconde de raison $1 - p \in]0, 1[$ donc convergente.

Ainsi, $\boxed{M \text{ admet une espérance}}$

et $E(M) = \sum_{n=2}^{+\infty} nP(M = n) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n - 1)(1 - p)^{n-2}p^2 = \dfrac{2p^2}{(1 - (1 - p))^3}$.

On retrouve bien $\boxed{E(M) = \dfrac{2}{p}}$.

5. **a.** Comme $m = X - Y$ et $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $\boxed{m(\Omega) = \mathbb{Z}}$.

b. Soit $k \in \mathbb{N}$. La formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([Y = i])_{i\in\mathbb{N}^*}$ donne :

$P(m = k) = P(X - Y = k) = \sum_{i=1}^{+\infty} P([X = i + k] \cap [Y = i])$.

Par indépendance des variables X et Y, $P(m = k) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(X = i + k)P(Y = i)$.

Comme $i + k \geqslant 1$,

$P(m = k) = \sum_{i=1}^{+\infty}(1 - p)^{i+k-1}p(1 - p)^{i-1}p = (1 - p)^k p^2 \sum_{i=1}^{+\infty}\left((1 - p)^2\right)^{i-1} = \dfrac{(1 - p)^k p^2}{1 - (1 - p)^2}$.

D'où $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ P(m = k) = \dfrac{p}{2 - p}(1 - p)^k}$.

c. Soit k un entier strictement négatif alors $n = -k \in \mathbb{N}^*$.
$P(m = k) = P(X - Y = -n) = P(Y - X = n)$. Comme X et Y ont même loi, on peut utiliser le résultat précédent et $P(Y - X = n) = \dfrac{(1 - p)^n p}{2 - p}$.

On en déduit que : $\boxed{\forall k < 0,\ P(m = k) = \dfrac{p}{2 - p}(1 - p)^{-k}}$.

d. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $|kP(m = k)| = \dfrac{p(1 - p)}{2 - p}k(1 - p)^{k-1}$.

Pour tout $k < 0$, en posant $n = -k$, $|kP(m = k)| = \dfrac{p(1 - p)}{2 - p}n(1 - p)^{n-1}$.

Dans les deux cas, on reconnait le terme général d'une série géométrique dérivée de raison $1 - p \in]0, 1[$ donc convergente.

Ainsi, $\boxed{m \text{ admet une espérance}}$ et $E(m) = \sum_{k=-\infty}^{-1} kP(m = k) + \sum_{k=1}^{+\infty} kP(m = k)$.

En posant $n = -k$ on a : $\sum_{k=-\infty}^{-1} kP(m = k) = -\sum_{n=1}^{+\infty} nP(m = -n) = -\sum_{n=1}^{+\infty} n\dfrac{p}{2 - p}(1 - p)^n$ d'après **c**.

Comme $\sum_{k=1}^{+\infty} kP(m = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{p}{2 - p}k(1 - p)^k$ d'après **b.**, on retrouve bien $\boxed{E(m) = 0}$.