DM7 Valeurs propres et variables aléatoires

pour jeudi 25 janvier

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes qui suivent toutes deux une même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}$.

1. Quelle est la probabilité que la matrice A soit inversible ?

2. On note M la plus grande valeur propre et m la plus petite valeur propre de A.

- **a.** Exprimer les valeurs propres de A en fonction de X et Y.
- **b.** Exprimer M et m en fonction de X et Y et calculer $P(M = m)$.
- **c.** Justifier que M et m admettent une espérance et les calculer.
- **d.** Écrire une fonction Python d'argument un flottant p qui renvoie une simulation de M et m.

3. Calculer les probabilités $P(M = 2)$, $P(m = 0)$ et $P([M = 2] \cap [m = 0])$.
Les variables M et m sont-elles indépendantes ?

4.
- **a.** Déterminer $M(\Omega)$.
- **b.** Soit $n \in M(\Omega)$. Exprimer l'événement $[M = n]$ comme une réunion d'événement liés aux variables X et Y.
  En déduire la probabilité $P(M = n)$.
- **c.** En utilisant la loi de M, montrer que M admet une espérance et retrouver la valeur de l'espérance de M calculée en **2c**.

5.
- **a.** Justifier que $m(\Omega) = \mathbb{Z}$.
- **b.** Soit $k \in \mathbb{N}$. À l'aide du système complet d'événements lié à la variable Y et de la formule des probabilités totales, déterminer $P(m = k)$.
- **c.** Soit k un entier strictement négatif et $n = -k$. Calculer $P(m = k)$.
- **d.** On admet que :
  m admet une espérance si, et seulement si, les deux séries $\sum_{k<0} kP(m = k)$ et $\sum_{k>0} kP(m = k)$ sont absolument convergentes
  et dans ce cas, $E(m) = \sum_{k=-\infty}^{-1} kP(m = k) + \sum_{k=1}^{+\infty} kP(m = k)$.
  Montrer que m admet une espérance et retrouver la valeur de l'espérance de m calculée en **2c**.