

pour jeudi 1er février

Soit b un nombre réel strictement positif.

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \begin{cases} \frac{b}{2^t} & \text{si } t \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

1. Déterminer la constante b pour g soit une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire de densité f .

On pose $Y = X - 1$.

2. a. Déterminer et reconnaître la loi de Y .
b. En déduire que la variable X possède une espérance et une variance et les calculer.
3. On note U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0, 1]$.
a. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer la loi de la variable $-\frac{1}{\lambda} \ln U$.
b. En déduire une fonction Python qui renvoie une simulation de la variable X .
4. On pose $Z = \lfloor X \rfloor$ où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la fonction partie entière.
a. Écrire une fonction Python qui renvoie une estimation de l'espérance de la variable Z .
Quelle conjecture peut-on faire quant à l'existence et la valeur de $E(Z)$?
b. Déterminer la loi de Z et donner son espérance.