Variables aléatoires réelles à densité

Ce qu'il faut connaître :

-la définition d'une densité
-la défintion d'une variable aléatoire à densité
-la définition de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité
-la définition de la fonction des quantiles d'une variable aléatoire à densité
-la probabilité d'un événement lié à une variable aléatoire à densité
-le critère d'existence et la définition du moment d'ordre r d'une variable aléatoire à densité
-le critère d'existence et la définition de l'espérance d'une variable aléatoire à densité
-le théorème de transfert
-le critère d'existence et la définition de la variance d'une variable aléatoire à densité
-la formule de Koenig-Huygens
-l'expression de la variable centrée réduite associée à une variable aléatoire à densité
-une densité, la fonction de répartition, l'espérance et la variance de la loi uniforme
-une densité, la fonction de répartition, l'espérance et la variance de la loi exponentielle
-la densité φ, la fonction de répartition Φ, l'espérance et la variance de la loi normale centrée réduite
-la fonction des quantiles et l'utilisation de la calcultrice pour la loi normale centrée réduite
-la densité, la fonction de répartition, l'espérance et la variance de la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
-l'utilisation de la table de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ par lecture directe et par lecture inverse (fonction des quantiles)
-la somme de variables indépendantes de lois normales

1. **Comment montrer qu'une fonction donnée f est une densité**
   -vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0$
   -justifier que f est continue presque partout (c'est-à-dire sauf en un nombre fini de points)
   -montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente et que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$
2. **Comment montrer qu'une fonction donnée F est la fonction de répartition d'une variable à densité**
   -justifier que F est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points
   -montrer que F est croissane sur $\mathbb{R}$
   -vérifier que $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$
3. **Comment calculer la probabilité d'un événement lié à une variable aléatoire à densité X**
   On utilise toujours la fonction de répartition F (ou une densité) de X :
   a. $\forall a \in \mathbb{R},\ P(X = a) = 0$
   b. $\forall a \in \mathbb{R},\ P(X < a) = P(X \leqslant a) = F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$
   c. $\forall a \in \mathbb{R},\ P(X > a) = P(X \geqslant a) = 1 - F(a) = \int_{a}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$
   d. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant b,\ P(a < X \leqslant b) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$
4. **Comment étudier l'existence et calculer l'espérance d'une variable aléatoire X de densité f**
   a. Si X suit une loi usuelle alors on donne directement le résultat du cours
   b. Si X n'est pas usuelle
      -on montre que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente
      -on calcule $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$
5. **Comment étudier l'existence et calculer la variance ou l'écart-type d'une variable X de densité f**
   a. Si X suit une loi usuelle alors on donne directement le résultat du cours
   b. Si X n'est pas usuelle
      -on s'assure que X admet une espérance $E(X)$
      -on montre que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente
      -on calcule $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ puis $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ ou $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{E(X^2) - E(X)^2}$

6. **Comment étudier la loi d'une variable aléatoire $Y = h(X)$ où X est une variable aléatoire à densité**
-on cherche l'univers image de Y : $Y(\Omega) = \{y = h(x) \mid x \in X(\Omega)\}$
-si $Y(\Omega)$ est fini ou infini dénombrable alors Y est une vard, on détermine $P(Y = y)$ pour tout y de $Y(\Omega)$
-si $Y(\Omega)$ est continu alors Y est une variable à densité.
-on détermine la fonction de répartition G de Y en calulant $P(Y \leqslant y)$ pour tout y de $\mathbb{R}$
en fonction des $P(X \in I)$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ (on aura souvent intérêt à s'aider d'un dessin)
-on vérifie que la fonction G trouvée est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en qq points
-on définit une densité g de Y en posant $g(y) = G'(y)$ en tout point où G est dérivable

7. **Comment calculer l'espérance et la variance d'une variable $Y = aX + b$ où X est à densité**
   a. si X admet une espérance alors Y admet une espérance et $E(Y) = aE(X) + b$
   b. si X admet une variance alors Y admet une variance et $V(Y) = a^2V(X)$

8. **Comment étudier l'existence et calculer l'espérance d'une variable $Y = u(X)$ où X est à densité**
Si u est une fonction affine, on utilise **7**.
Sinon, on utilise le théorème de transfert :
-on montre que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente
-on calcule $E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)f(t)\,\mathrm{d}t$

9. **Comment utiliser la table de la loi normale centrée réduite**
   a. $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ et $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ ne peut pas s'exprimé à l'aide de fonctions usuelles
   b. $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m,\sigma^2) \Leftrightarrow X^* = \dfrac{X-m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$
   c. Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, la table de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ donne les valeurs de $\Phi(x) = P(X \leqslant x)$ pour $x \in [0,3[$
   -pour $0 \leqslant a \leqslant b < 3,\ P(a \leqslant X \leqslant b) = \Phi(b) - \Phi(a)$
   -pour $x \in]-3,0],\ \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$
   -pour $x \geqslant 0$ alors $P(|X| \leqslant x) = 2\Phi(x) - 1$ et $P(|X| \geqslant x) = 2(1 - \Phi(x))$

10. **Comment utiliser la calcultrice pour trouver des valeurs de la loi normale centrée réduite**
pour calculer $P(a \leqslant X \leqslant b)$, on utilise la fonction
   a. `norm.cdf()` en Python
   b. normalcdf ou normalFRép avec une TI
   c. Ncd avec une CASIO

11. **Comment utiliser la calcultrice pour trouver des quantiles de la loi normale centrée réduite**
Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ alors $U_\alpha = x \Leftrightarrow P(X \leqslant x) = \alpha$
-souvent utilisés : $U_{0,5} = 0$ $\quad U_{0,95} = 1,645$ $\quad U_{0,975} = 1,96$
-Pour calculer U_α, on utilise la fonction
   a. `norm.ppf()` en Python
   b. invNorm ou FracNormale avec une TI
   c. InvN avec une CASIO

12. **Comment déterminer la loi de la somme de deux variables à densité indépendantes**
   a. Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes
   alors la somme $Z = X + Y$ est une variable à densité
   et une densité de Z est donnée par le produit de convolution des densités de X et de X :
   $\forall z \in \mathbb{R},\ f_Z(x) = \int_{\mathbb{R}} f_X(t)f_Y(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} f_X(x-t)f_Y(t)\,\mathrm{d}t$ (toujours donné dans les énoncés)
   b. Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de lois normales $\mathcal{N}(\mu_1,\sigma_1^2)$ et $\mathcal{N}(\mu_2,\sigma_2^2)$
   alors $Z = X + Y$ suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$
   c. Plus généralement, si $\forall i \in [1,n],\ X_i \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_i,\sigma_i^2)$ sont indépendantes alors,
   en posant $X = \sum_{i=1}^{n} X_i,\ \mu = \sum_{i=1}^{n}\mu_i$ et $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2$, on a $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$