Semaine 15
du lundi 29 janvier au vendredi 2 février

Intégrales généralisées

Convergence d'une intégrale impropre d'une fonction continue sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert
Cas d'une fonction définie sur un intervalle et continue sur un intervalle sauf en un nombre fini de points
Cas particulier d'une fonction prolongeable par continuité en un point
Propriétés des intégrales convergentes : linéarité, relation de Chasles, positivité, croissance
Adaptation de l'intégration par parties aux intégrales impropres
Adaptation de la formule de changement de variable pour les intégrales impropres
Cas des fonctions paires ou impaires
Théorème de comparaison de deux fonctions positives
Si deux fonctions positives sont équivalentes en b alors les deux intégrales, impropres en b, $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ sont de même nature
Convergence absolue d'une intégrale généralisée
La convergence absolue est une condition suffisante de convergence
L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$ converge et vaut $\sqrt{2\pi}$

Variables aléatoires à densité (pour cette semaine, pas de lois usuelles)

Une variable aléatoire réelle X est à densité s'il existe une fonction f positive, continue sauf éventuellement en un nombre fini de points telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.
Une telle fonction f, qui n'est pas unique, est appelée densité de X.
X admet une densité si, et seulement si, sa fonction de répartition F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.
Donner la loi de X, c'est justifier que X admet une densité et en donner une
Si une fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, positive, continue sauf éventuellement en un nombre fini de points
et si $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente égale à 1 alors il existe une variable aléatoire X dont f est une densité.
Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, $P(X \in I) = \int_I f(t)\,\mathrm{d}t$
Espérance d'une variable à densité.
Propriétés de l'espérance : linéarité (résultat admis), positivité et croissance.
Notion de variable centrée.
Théorème de transfert (résultat admis)
Variance d'une variable à densité
Signe de la variance
Formule de König-Huygens
Variance de $aX + b$
Notion de variable centrée réduite
Variable centrée réduite associée à une variable admettant une variance
Écart-type d'une variable à densité

Questions de cours

Définition de la convergence d'une intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ si f est continue sur l'intervalle $[a,b[$
Définition de la convergence d'une intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ si f est continue sur l'intervalle $[a,+\infty[$
Donner la relation de Chasles pour les intégrales impropres
Donner le théorème de comparaison pour les intégrales impropres
Donner le théorème de convergence d'intégrales de fonctions équivalentes
Théorème sur les fonctions équivalentes
Définiton de l'absolue convergence et le critère de convergence d'une intégrale généralisée

Théorème d'intégration par parties pour une intégrale généralisée

Donner la définition d'une densité de probabilité
Donner la définition de la fonction de répartition d'une variable aléatoie X de densité f
À quelles conditions sur sa fonction de répartition X admet-elle une densité ? Comment la détermine-t-on alors ?
Donner une condition pour qu'une variable X de densité f admette un moment d'ordre r et définir ce moment
Donner une condition pour qu'une variable X de densité f admette une espérance et la définir
Donner une condition pour qu'une variable X de densité f admette une variance et la définir
Donner espérance et variance de $Y = aX + b$ en précisant les conditions
Théorème de transfert
Définir la variable centrée réduite associée à une variable à densité X en précisant les conditions