TD 12 : Intégrales généralisées

1 Exercices d'application du cours

1 Établir la convergence et Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} x\, e^{-x^2}\, dx$ *rép :* $\frac{1}{2}$
2. $I_2 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\arctan x|}{1+x^2}\, dx$ *rép :* $\frac{\pi^2}{4}$
3. $I_3 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2-x+1}\, dx$
4. $I_4 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2}\, dx$ *rép :* $\frac{\pi}{4} + \dfrac{\ln 2}{2}$ (*indication : effectuer une ipp puis poser* $u = t^2$)
5. $I_5 = \displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}}\, dx$
   (poser $t = \sqrt{1-x}$) *rép :* $4(\ln 2 - 1)$

2 Exercices classiques

3 Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, et $n \in \mathbb{N}^\star$ et :

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n\, e^{-ax}\, dx$$

1. Montrer que les intégrales convergent pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Déterminer une relation entre I_n et I_{n+1}.
3. En déduire la valeur de I_n en fonction de n.

4 On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{n+x}\, dx$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Justifier l'existence de I_n.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0.
3. Montrer que $I_n \sim \dfrac{1}{n}$ lorsque n tend vers $+\infty$ (on pourra d'abord intégrer par parties I_n).

5 Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n} \quad \text{et} \quad J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n}.$$

Pour tout entier naturel n :

1. Étudier la convergence de l'intégrale I_n.
2. Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
3. Exprimer I_n en fonction de n.
4. Étudier l'intégrale J_n.

6 On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n-1)x}{\sin x}\, dx.$$

1. Étudier l'existence de l'intégrale I_n pour tout entier naturel n.
2. Calculer $I_{n+1} - I_n$ pour tout entier naturel n.
3. Exprimer I_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

$\boxed{7}$ On pose

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln\big(\sin x\big)\, dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\pi/2} \ln\big(\cos x\big)\, dx.$$

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(x)\, dx$ est convergente.
2. Soit g la fonction définie sur $]0, \pi/2]$ par :
   $g(x) = \ln\big(\sin x\big) - \ln x$.

   Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} g(x)\, dx$ puis celle de I.
3. (a) Calculer $I + J$ (*On pourra effectuer dans J le changement de variables $t = x + \pi/2$*).

   (b) Montrer que $I = J$.

   (c) En déduire $I = J = -\dfrac{\pi}{2} \ln 2$.