TD 13 : Variables aléatoires à densité

1 Exercices d'application du cours

$\boxed{1}$ Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité d'une variable aléatoire X.
2. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi que X. On note $Y = \min(X_1, X_2)$. Montrer que Y est une variable à densité et calculer une densité de probabilité de Y.

$\boxed{2}$ Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x\, e^{-x^2/2} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f.
   (a) Reconnaître la loi de $Y = X^2$.
   (b) Donner l'espérance et la variance de Y.

$\boxed{3}$ Déterminer la loi de $Y = \sqrt{X}$ dans le cas où X suit une loi exponentielle de paramètre λ.
Si elles existent, calculer l'espérance et la variance de Y.

$\boxed{4}$ Soit X une variable aléatoire réelle qui suit une loi normale centrée réduite et $Z = 1 - 2X$.
Déterminer la loi de Z.

2 Exercices classiques

$\boxed{5}$ Soit $p \in]0,1[$, et $a < b$ deux réels strictement positifs. Une boite contient deux ampoules A et B indiscernables mais dont les durées d'éclairement suivent une loi exponentielle de paramètres respectifs a et b. On tire au hasard une ampoule de la boite, la probabilité que A soit choisie étant égale à p. On note X la variable aléatoire égale à la durée de vie de l'ampoule issue de ce protocole.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer son espérance et sa variance.

$\boxed{6}$ Soit $a > 0$ et X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, a]$.
On définit les variables aléatoires $Y = a - X$,
$U = \max(X, Y)$ et $V = \min(X, Y)$.

1. Déterminer la loi de Y. Calculer son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi de U. Calculer son espérance et sa variance.
3. Déterminer la variable aléatoire $U + V$, puis la loi, l'espérance et la variance de V.

$\boxed{7}$ Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}.$$

1. Montrer que la F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X à densité.
2. Comparer les lois de X et de $-X$.
3. On pose $Y = \dfrac{e^X + 1}{e^X - 1}$.
   Trouver $Y(\Omega)$ et déterminer la loi de Y.

$\boxed{8}$ On note f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{C}{x(x+1)} & \text{si} \quad x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer C pour que f soit la densité de probabilité d'une variable aléatoire X.
2. Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
3. Quelle est la loi de la variable aléatoire $Y = \dfrac{1}{X}$?
4. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire Z définie par

$$Z = X - \lfloor X \rfloor,$$

   $\lfloor X \rfloor$ désignant la partie entière de X.
   Comparer les lois de Y et Z.

Les exercices suivants utilisent la formule de convolution :
Si X et Y sont des variables aléatoires à densité indépendantes, alors $X+Y$ est une variable aléatoire à densité dont une densité f_{X+Y} est donnée par :

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, f_Y(z-t)\, \mathrm{d}t.$$

$\boxed{9}$ Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathscr{U}(0,1)$ et $\mathscr{U}(0,2)$.
Déterminer la loi de $X+Y$. Calculer son espérance et sa variance.

$\boxed{10}$ Soit $\lambda > 0$ un réel, et X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes, de loi exponentielle de paramètre λ.

1. Déterminer une densité de $-X$, puis une une densité de $X-Y$ par convolution.
2. Vérifier que $Z = |X-Y|$ suit une loi exponentielle.