Semaine 16
du lundi 5 au vendredi 9 février 2024

Variables aléatoires à densité

Une variable aléatoire réelle X est à densité s'il existe une fonction f positive, continue sauf éventuellement en un nombre fini de points telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Une telle fonction f, qui n'est pas unique, est appelée densité de X

X admet une densité si, et seulement si sa fonction de répartition F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre fini de points

Donner la loi de X c'est justifier que X admet une densité et en donner une

Si une fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, positive, continue sauf éventuellement en un nombre fini de points et si $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente égale à 1 alors il existe une variable aléatoire X dont f est une densité

Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, $P(X \in I) = \int_I f(t)\,\mathrm{d}t$

Exemples de recherche de la loi du minimum et du maximum de deux ou de n variables aléatoires indépendantes

Moments d'une variable à densité

Espérance d'une variable à densité.

Propriétés de l'espérance : linéarité (résultat admis), positivité et croissance

Notion de variable centrée

Théorème de transfert (résultat admis)

Variance d'une variable à densité

Signe de la variance

Formule de König-Huygens

Variance de $aX + b$

Notion de variable centrée réduite

Variable centrée réduite associée à une variable admettant une variance non nulle

Écart-type d'une variable à densité

Loi uniforme sur $[a, b]$: densité, fonction de répartition, espérance, variance

Loi exponentielle : densité, fonction de répartition, espérance, variance

Loi normale (ou gaussienne) centrée réduite : densité notée φ, espérance, variance

Loi normale de paramètre μ, σ^2 : densité, espérance, variance

Si X suit une loi normale alors, pour tous réels $a \neq 0$ et b, $aX + b$ suit une loi normale

Si X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors $X^* = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$

Loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes à densité (résultat admis et la formule du produit de convolution doit être rappelée)

Somme de deux variables aléatoires normales indépendantes (généralisation au cas de n variables gaussiennes indépendantes)

Questions de cours

Donner la définition d'une densité de probabilité

Donner la définition de la fonction de répartition d'une variable aléatoie X de densité f

Donner une condition pour qu'une variable X de densité f admette un moment d'ordre r et définir ce moment

Donner une condition pour qu'une variable X de densité f admette une espérance et la définir

Donner une condition pour qu'une variable X de densité f admette une variance et la définir

Donner espérance et variance de $Y = aX + b$ en précisant les conditions

Théorème de transfert

Définir la variable centrée réduite associée à une variable à densité X en précisant les conditions

Donner densité, fonction de répartition, espérance et variance de la loi uniforme sur $[a,b]$

Donner densité, fonction de répartition, espérance et variance de la loi exponentielle de paramètre λ

Donner densité, fonction de répartition, espérance et variance d'une loi normale

Allure de la représentation graphique d'une densité de la loi exponentielle de paramètre 1.

Allure de la représentation graphique d'une densité de la loi normale d'espérance 1 et de variance 1.

À quelle(s) condition(s) sur sa fonction de répartition une variable aléatoire X admet-elle une densité de probabilité ? Comment détermine-t-on alors une densité de X ?