Applications linéaires

I Application linéaire

1. Définitions

Déinition 1 Soit E et F deux espaces vectoriels et φ une application de E dans F.
φ est une application linéaire si, et seulement si, φ respecte la structure d'espace vectoriel :
$\Leftrightarrow \forall (u,v) \in E^2,\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ \varphi(\lambda u + \mu v) = \lambda\varphi(u) + \mu\varphi(v)$
$\Leftrightarrow \forall (u,v) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$ et $\varphi(\lambda u) = \lambda\varphi(u)$
$\Leftrightarrow \forall (u,v) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \varphi(\lambda u + v) = \lambda\varphi(u) + \varphi(v)$

Notation et vocabulaire

- Une application linéaire est aussi appelée un morphisme.
  L'ensemble des apllications linéaires ou morphismes de E dans F est noté $\mathcal{L}(E,F)$.
- Une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ est appelée une forme linéaire sur E.
- Une application linéaire bijective est appelée un isomorphisme.
  Si $\varphi : E \to F$ est un isomorphisme, on dit que E et F sont isomorphes.
- Une application linéaire de E dans lui-même est appelée un endomorphisme de E.
  L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$.
- Un endomorphisme bijectif de E est appelé un automorphisme de E.
  L'ensemble des automorphismes de E est noté $\mathcal{GL}(E)$.

Proposition 1 Soit E et F deux espaces vectoriels.
Si φ une application linéaire de E vers F alors $\varphi(0_E) = 0_F$.

Preuve Comme $\forall u \in E,\ \forall t \in \mathbb{K},\ \varphi(tu) = t\varphi(u)$, pour $t = 0$ on obtient : $\varphi(0_E) = 0_F$.

Exemples **Dans** $\mathbb{K}^n$:
-tous les exemples d'applications linéaires de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ vus en 1ère année
- $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K},\ (x_1,\cdots,x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i$ est une forme linéaire.

En algèbre linéaire : soit E un espace vectoriel.
- l'application identique de E, id_E, est un automorphisme de E
- l'homothétie de rapport k ($k \in \mathbb{K}$) définie par : $\forall u \in E,\ h_k(u) = ku$.
  h_k est un endomorphisme de E (automorphisme si $k \neq 0$)

Dans l'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:
- la transposition définie par $M \mapsto {}^tM$ est une application linéaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.
- soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. $f : M \mapsto MA$ est une application linéaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$

Dans des ensembles de fonctions :
- la dérivation des fonctions dérivables sur I définie par : $\forall f \in \mathcal{D}(I,\mathbf{R}),\ d(f) = f'$.
  d est une application linéaire de $\mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ dans $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$.
- la primitivation des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}),\ \Phi(f) : x \mapsto \int^x f(t)$ dt. Φ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.
- l'intégration : $f \mapsto \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}^0([a,b])$.

Dans l'ensemble $\mathbb{R}^\Omega$ **des variables aléatoires réelles sur un univers** Ω :
- l'espérance mathématique est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^\Omega$.

2. Image et noyau d'une application linéaire

Définition 2 Soit E et F deux espaces vectoriels et $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$.
L'image de φ est l'ensemble des images par φ des vecteurs de E. On note
$\operatorname{Im}\varphi = \{\varphi(u) \mid u \in E\} = \varphi(E)$ et $\forall v \in F,\ v \in \operatorname{Im}\varphi \Leftrightarrow \exists u \in E \mid v = \varphi(u)$.

Le noyau de φ est l'ensemble des vecteurs de E qui ont une image nulle par φ. On note
$\ker\varphi = \{u \in E \mid \varphi(u) = 0_F\} = \varphi^{-1}(0_F)$.

Proposition 2 Soit E et F deux espaces vectoriels et $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$.
$\operatorname{Im}\varphi$ est un sous-espace vectoriel de F.
On appelle rang de φ la dimension de $\operatorname{Im}\varphi$
$\ker\varphi$ est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve
- Il est clair que $\operatorname{Im}\varphi \subset F$ et $\ker\varphi \subset E$
- Comme $\varphi(0_E) = 0_F$, $0_F \in F$ et $0_E \in E$
- $\forall (u',v') \in \operatorname{Im}\varphi^2$, $\exists (u,v) \in E^2 \mid u' = \varphi(u)$ et $v' = \varphi(v)$
  donc $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda u' + v' = \lambda\varphi(u) + \varphi(v) = \varphi(\lambda u + v) \in \operatorname{Im}\varphi$.
- $\forall (u,v) \in \ker\varphi^2$, $\varphi(u) = \varphi(v) = 0_F$ donc $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\varphi(\lambda u + v) = 0_F$ et $\lambda u + v \in \ker\varphi$.

Exercice 1 Montrer que l'application donnée est un endomorphisme.
Déterminer son noyau et son image.
(1) Dans $E = \mathbb{R}_3[X]$, φ est défini par : $\varphi(P) = XP' - 2P$.
(2) Dans $E = \mathcal{C}^\infty(I)$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, d est définie sur E par $d(f) = f'$.

Proposition 3 Théorème du rang
Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$.
Si E est de dimension finie alors $\dim \operatorname{Im}\varphi + \dim\ker\varphi = \dim E$.
Autrement dit : $rg\ \varphi + \dim\ker\varphi = \dim E$.

Preuve (hors programme) : Soit $n = \dim E$ et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E alors
$\varphi(\mathcal{B}) = (\varphi(e_1), \cdots, \varphi(e_n))$ est une partie génératrice de $\operatorname{Im}\varphi$.
Étudions l'indépendace linéaire de ces n vecteurs de F :
$$\sum_{i=1}^n \lambda_i\varphi(e_i) = 0_F \Leftrightarrow \varphi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right) = 0_F \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \in \ker\varphi$$

1er cas : si $\ker\varphi = \{0_E\}$ ($\dim\ker\varphi = 0$) alors $\displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i\varphi(e_i) = 0_F \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0_E$
et, comme $\mathcal{B}$ est une base de E, $\forall i \in [1,n]$, $\lambda_i = 0$.
Ainsi, $\varphi(\mathcal{B}) = (\varphi(e_1), \cdots, \varphi(e_n))$ est une partie libre et génératrice de $\operatorname{Im}\varphi$,
donc une base de $\operatorname{Im}\varphi$ et $\dim \operatorname{Im}\varphi = n$.

2e cas : si $\ker\varphi = E$ ($\dim\ker\varphi = n$) alors $\forall u \in E$, $\varphi(u) = 0_F$ et $\operatorname{Im}\varphi = \{0_F\}$, $\dim\operatorname{Im}\varphi = 0$.

3e cas : si $\ker\varphi \neq \{0_E\}$ et $\ker\varphi \neq E$ alors $1 \leqslant \dim\ker\varphi = p \leqslant n-1$.
Grâce au théorème de la base incomplète, on peut considérer que
$\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E telle que $(e_1, \cdots, e_p)$ soit une base de $\ker\varphi$.
On montre que $(\varphi(e_{p+1}), \cdots, \varphi(e_n))$ est une partie libre et génératrice de $\operatorname{Im}\varphi$,
donc une base de $\operatorname{Im}\varphi$ et $\dim\operatorname{Im}\varphi = n - p$.

3. Injectivité, surjectivité, bijectivité

Proposition 4 Soit E et F deux espaces vectoriels et $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$.
-φ est injective si, et seulement si, $\ker \varphi = \{0_E\}$.
-φ est surjective si, et seulement si, $\operatorname{Im} \varphi = F$.

Preuve φ est injective $\Leftrightarrow [\forall (x,y) \in E^2, \varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow x = y]$

$$\Leftrightarrow [\forall (x,y) \in E^2, \varphi(x) - \varphi(y) = 0 \Rightarrow x - y = 0]$$
$$\Leftrightarrow [\forall (x,y) \in E^2, \varphi(x - y) = 0 \Rightarrow x - y = 0]$$
$$\Leftrightarrow [\forall z \in E, \varphi(z) = 0 \Rightarrow z = 0] \Leftrightarrow \ker \varphi = \{0_E\}.$$

Proposition 5 Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, $p = \dim E$ et $n = \dim F$.
Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors
•φ est injective $\Leftrightarrow rg(\varphi) = p$
•φ est surjective $\Leftrightarrow rg(\varphi) = n$
•φ est bijective $\Leftrightarrow rg(\varphi) = p = n$

Preuve D'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Im} \varphi + \dim \ker \varphi = p$.
•φ est injective $\Leftrightarrow \ker \varphi = \{0_E\} \Leftrightarrow \dim \ker \varphi = 0 \Leftrightarrow \dim \operatorname{Im} \varphi = p$
•φ est surjective $\Leftrightarrow \operatorname{Im} \varphi = F \Leftrightarrow \dim \operatorname{Im} \varphi = n$ car $\operatorname{Im} \varphi$ est un sous-espace vectoriel de F.
•φ est bijective $\Leftrightarrow$ φ est injective et φ est surjective $\Leftrightarrow \dim \operatorname{Im} \varphi = p = n$

Proposition 6 Soit φ est un isomorphisme de E vers F.
Alors son application réciproque φ^{-1} est un isomorphisme de F sur E.

Preuve à faire en exercice.

Proposition 7 Si φ est une application linéaire injective de E sur F alors l'image d'une famille libre de E est une famille libre de F.

Preuve Soit $L = \{x_1, \cdots, x_p\}$ une famille libre de E.
Montrons que $f(L) = \{f(x_1), \cdots, f(x_p)\}$ est libre :
Soit $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $\lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_p f(x_p) = 0$.
Alors, comme f est un endomorphisme, $f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p) = 0$
et comme f est injectif, $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p = 0$.
Comme L est libre, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$ donc $f(L)$ est libre.

Proposition 8 Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$.
φ est un isomorphisme de E sur F si, et seulement si, l'image d'une base de E est une base de F.
En particulier, $\dim E = \dim F$.

Proposition 9 Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$.
Si $\dim E = \dim F$ alors φ est injectif $\Leftrightarrow$ φ est surjectif $\Leftrightarrow$ φ est bijectif

Preuve Soit $n = \dim E = \dim F$. On sait que :
φ est injectif $\Leftrightarrow \ker \varphi = \{0_E\} \Leftrightarrow \dim \ker \varphi = 0$
et φ est surjectif $\Leftrightarrow \operatorname{Im} \varphi = F \Leftrightarrow \dim \operatorname{Im} \varphi = n$
Or $\dim \ker \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi = \dim E$ donc φ est injectif $\Leftrightarrow$ φ est surjectif.

Exercice 2 Soit E un espace vectoriel de dimension n. Montrer que E est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

4. Composition des applications linéaires

Proposition 10 Soit E, F et G trois espaces vectoriels.
Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$ alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$.

Exercice 3 Soit $(f,g) \in \mathcal{L}(E)^2$. Montrer que : $\ker f = \ker(g \circ f) \Leftrightarrow \mathrm{Im} f \cap \ker g = \{0_E\}$.

II Matrice d'une application linéaire

1. Définition de la matrice d'une application linéaire

Proposition 11 Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie p et n respectivement.
Une application linéaire f de E dans F est entièrement déterminée par la donnée des coordonnées des images des vecteurs d'une base de E dans une base de F

Preuve Soit $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_p)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (v_1, \ldots, v_n)$ une base de F.
$\forall u \in E, \exists!(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p \ / \ u = x_1u_1 + \ldots + x_pu_p = \sum_{j=1}^{p} x_ju_j$

D'où $f(u) = f\left(\sum_{j=1}^{p} x_ju_j\right) = \sum_{j=1}^{p} x_jf(u_j)$ car f est linéaire.

Or, $\forall\, j \in [\![1,p]\!], f(u_j) \in F$ donc $\exists!(a_{1j}, \ldots, a_{nj}) \in \mathbb{K}^n \ / \ f(u_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}v_i$.

Finalement, f est entièrement définie par les réels $(a_{1j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$.

On a en effet : $f(u) = f\left(\sum_{j=1}^{p} x_ju_j\right) = \sum_{j=1}^{p} x_jf(u_j) = \sum_{j=1}^{p} x_j\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}v_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j\right)v_i$.

Définition 3 Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie p et n respectivement.
Soit f une application linéaire de E dans F.
Soit $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_p)$ une base de E et $B' = (v_1, \ldots, v_n)$ une base de F.
On appelle matrice associée à f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ la matrice d'ordre (n,p), notée $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$, définie par :

$$Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = (a_{ij})_{i\in[\![1,n]\!],j\in[\![1,p]\!]} \Leftrightarrow \forall\, j \in [\![1,p]\!]\,, f(u_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}v_i.$$

Autrement dit : La matrice $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ est la matrice dont la j-ème colonne est constituée des coordonnées de $f(u_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$, pour tout j de $\{1, \cdots, p\}$.

Exercice 4
- Soit f l'application définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y,z) = (2x - y + 3z, x + y - z)$. Donner la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.
- Soit id l'application identique de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^p$, qui à tout u associe u. Donner la matrice de id dans n'importe quelle base de $\mathbb{K}^p$.
- Dans $\mathbb{R}_3[X]$, soit $f : P \mapsto P'$. Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

Déinition 4 Soit $A = (a_{ij})_{i\in[\![1,n]\!],j\in[\![1,p]\!]}$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On définit l'application linéaire canoniquement associée à A par :

$f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ et $\forall j \in [\![1,p]\!], f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e'_i$

où $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$ sont les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$.

2. Écriture matricielle de l'image d'un vecteur

Soit E et F de dimension p et n et de bases $B = (u_1, \dots, u_p)$ et $B' = (v_1, \dots, v_n)$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $A = (a_{ij})_{i\in[[1,n]],j\in[[1,p]]}$ sa matrice f relativement aux bases B et B'.

Soit u un vecteur de E de coordonnées $(x_1, \dots, x_p)$ dans la base B, on a donc $u = \sum_{j=1}^{p} x_j u_j$.

Soit $(y_1, \dots, y_n)$ les coordonnées de $f(u)$ dans la base B', on a donc $f(u) = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i$.

Or $f(u) = f\left(\sum_{j=1}^{p} x_j u_j\right) = \sum_{j=1}^{p} x_j f(u_j) = \sum_{j=1}^{p} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j\right) v_i$, donc par identification:

$\forall\, i \in \{1, \dots, n\}$, $y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j$ ou encore : $\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p \\ \quad\vdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p \end{cases}$.

En posant $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $A = (a_{ij})_{(i,j)\in[[1,n]]\times[[1,p]]}$ on a $Y = AX$

Proposition 12 Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie p et n respectivement.
Soit $B = (u_1, \dots, u_p)$ et $B' = (v_1, \dots, v_n)$ des bases de E et F respectivement.
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $A = (a_{ij})_{i\in[[1,n]],j\in[[1,p]]}$ sa matrice dans les bases B et B'.
Soit X la matrice colonne des coordonnées d'un vecteur u de E relativement à $\mathcal{B}$ et Y la matrice colonne des coordonnées d'un vecteur v de F relativement à $\mathcal{B}'$
Alors $v = f(u) \Leftrightarrow Y = AX$

3. Opérations sur les applications linéaires et leurs matrices

a. Somme

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie p et n respectivement.
Soit $B = (u_1, \dots, u_p)$ et $B' = (v_1, \dots, v_n)$ des bases de E et F respectivement.
Soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E,F)^2$, $A = (a_{ij})_{i\in[[1,n]],j\in[[1,p]]}$ et $B = (b_{ij})_{i\in[[1,n]],j\in[[1,p]]}$ les matrices de f et de g relativement aux bases B et B'. Alors
$A + B = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f + g) = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) + \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g)$

b. Produit par un scalaire

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie p et n respectivement.
Soit $B = (u_1, \dots, u_p)$ et $B' = (v_1, \dots, v_n)$ des bases de E et F respectivement.
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $A = (a_{ij})_{i\in[[1,n]],j\in[[1,p]]}$ sa matrice f relativement aux bases B et B'.
Alors $\lambda A = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\lambda f) = \lambda \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

c. Produit et composée

Soit E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie p, n, m.
Soit $B = (u_1, \dots, u_p)$, $B' = (v_1, \dots, v_n)$ et $\mathcal{B}'' = (w_1, \dots, w_m)$ des bases de E, G et G respectivement.
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(F,G)$ et $h = g \circ f$.
Soit $A = (a_{ij})_{i\in[[1,n]],j\in[[1,p]]} = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$, $B = (b_{ij})_{i\in[[1,m]],j\in[[1,n]]} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g)$ et
$C = (c_{ij})_{i\in[[1,m]],j\in[[1,p]]} = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(h)$.
Alors $C = BA \Leftrightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) \times \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$

d. Puissances

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, de base $B = (u_1, \ldots, u_n)$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ sa matrice relativement à la base B.
On note $f^0 = id_E$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ f^k = f \circ f \circ \ldots \circ f$
alors $A^k = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f^k) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)^k$

e. Inverse et réciproque

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, de base $B = (u_1, \ldots, u_n)$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ sa matrice relativement à la base B.
Alors A est inversible si, et seulement si, f est un automorphisme de E
et dans ce cas : $A^{-1} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)^{-1} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f^{-1})$

Remarque Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Par définition, A est inversible $\Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = \mathcal{I}_n$.
Montrons que A est inversible $\Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = \mathcal{I}_n$:
Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ telles que $AB = \mathcal{I}_n$.
Soit f et g les endomorphismes canoniquement associés à A et B respectivement.
On a alors $f \circ g = id$ donc $\forall u \in \mathbb{K}^n$, $f(g(u)) = u$ et donc f est surjective.
Comme f est un endorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, f est donc bijective.
f est alors un automorphisme de E donc A est inversible et $A^{-1} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f^{-1})$.
Comme $AB = \mathcal{I}_n$, $B = A^{-1}$ et donc $BA = I_n$.

Proposition 13 • Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie.
Soit $p = \dim E$ et $n = \dim F$.
Soit $B = (u_1, \ldots, u_p)$ une base de E et $B' = (v_1, \ldots, v_n)$ une base de F.
L'application qui à toute application linéaire f associe sa matrice relativement aux bases B et B' est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

• Soit E un espace vectoriel de dimension finie n de base $B = (u_1, \ldots, u_p)$.
L'application qui à tout endomorphisme f associe sa matrice relativement à la base B est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

• Sa restriction à $\mathcal{GL}(E)$ (automorphismes) définit un isomorphisme de $\mathcal{GL}(E)$ dans l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Preuve à faire en exercice.

Remarque On en déduit que $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np$ et $\dim \mathcal{L}(E) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = n^2$.

4. Rang d'une matrice

Définition 5 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle rang de A, noté $rg(A)$, le rang de l'application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ dont la matrice canoniquement associée est A.

Proposition 14 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
alors $rg(A) = rg({}^tA) = rg(C_1(A), \ldots, C_p(A)) = rg(L_1(A), \ldots, L_n(A))$
Le rang de A est aussi le nombre de pivots de la matrice échelonnée issue de A.

Proposition 15 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors A est inversible si, et seulement si, $rg(A) = n$.

5. Équations de l'image et du noyau d'une application linéaire

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie p et n, de base $B = (u_1, \ldots, u_p)$ et $B' = (v_1, \ldots, v_n)$ respectivement.

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ définie par : $f(\sum_{j=1}^{p} x_j u_j) = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i$ avec $\begin{cases} y_1 & = & a_{11}x_1 + \ldots + a_{1p}x_p \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n & = & a_{n1}x_1 + \ldots + a_{np}x_p \end{cases}$

alors $M_{B,B'}(f) = A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1p} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{i \in [\![1,n]\!], j \in [\![1,p]\!]}$.

Rappels $\bullet f(B) = (f(u_1), \ldots, f(u_p)) = (C_1(A), \cdots, C_p(A))$ est une partie génératrice de $\mathrm{Im} f$.

$\bullet v \in \mathrm{Im} f \Leftrightarrow \exists u \in E \mid f(u) = v$ autrement dit :

$\sum_{i=1}^{n} y_i v_i \in \mathrm{Im} f \Leftrightarrow \exists (x_1, \cdots, x_p) \in \mathbb{K}^p \mid f(\sum_{j=1}^{p} x_j u_j) = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i$

$\Leftrightarrow (S) : \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1p} & y_1 \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{np} & y_n \end{array}\right)$ admet des solutions

$\bullet u \in \ker f \Leftrightarrow f(u) = 0_F$

Pour la recherche d'équations de $\mathrm{Im} f$ et de $\ker f$ on utilise la méthode du pivot de Gauss pour échelonner le système (S). On aboutit à un système (S') équivalent à (S) :

$$(S') : \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & \cdots & 0 & a'_{1r+1} & \cdots & a'_{1p} & y'_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & & 1 & a'_{r(r+1)} & \cdots & a'_{(r+1)p} & y'_r \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & y'_{r+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & y'_n \end{array}\right).$$

On en déduit facilement que :

-$v \in \mathrm{Im} f \Leftrightarrow$ les $n - r$ relations de compatibilité sont vérifiées ce qui fournit les $n - r$ équations de $\mathrm{Im} f$

-$u \in \ker f \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & = & -(a'_{1(r+1)}x_{r+1} + \ldots + a'_{1p}x_p) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_r & = & -(a'_{r(r+1)}x_{r+1} + \ldots + a'_{(r+1)p}x_p \end{cases}$ ce qui fournit des équations de $\ker f$.

-$rg(f) = rg(A) = rg(f(u_1), \ldots, f(u_p)) = rg(C_1(A), \cdots, C_p(A)) = r$

-$(f(u_1), \ldots, f(u_r)$ est libre et génératrice donc une base de $\mathrm{Im} f$.

Exercice 5 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ de matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -7 \end{pmatrix}$ dans les bases canoniques.

Déterminer n et p ainsi que des équations et des bases de $\mathrm{Im} f$ et $\ker f$.

III Changement de bases

1. Action d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme

Soit E de dimension $n, f \in \mathcal{L}(E)$.
Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
Soit $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$ et $A' = Mat_{\mathcal{B}'}(f)$.
Soit $u \in E,\ X = Mat_{\mathcal{B}}(u), X' = Mat_{\mathcal{B}'}(u)$.
Soit $v \in E,\ Y = Mat_{\mathcal{B}}(v), Y' = Mat_{\mathcal{B}'}(v)$.
Alors $X = PX' \Leftrightarrow X' = P^{-1}X,\ Y = PY' \Leftrightarrow Y' = P^{-1}Y$
On a $v = f(u) \Leftrightarrow Y' = A'X'$ et aussi $v = f(u) \Leftrightarrow Y = AX$.
Or $Y = AX \Leftrightarrow PY' = APX'$ d'où $Y' = A'X' \Leftrightarrow Y' = P^{-1}APX'$ et donc $A' = P^{-1}AP$.

Proposition 16 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$
Soit $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ et $A' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}''}(f)$ alors $A' = P^{-1}AP$.

Exercice 6 Rappeler la base canonique $\mathcal{C}_3$ de $\mathbb{R}_3[X]$.
Soit $\mathcal{B} = (1, X-1, (X-1)^2, (X-1)^3)$. Justifier que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
Soit φ l'application définie par : $\forall P \in \mathbb{R}_3[X],\ \varphi(P) = Q$ où $\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = P(x+1) - P(x)$.
Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ en donner sa matrice dans $\mathcal{C}_3$.
Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.

2. Matrices semblables

Définition 6 Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On dit que A et B sont semblables si, et seulement si :
il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Proposition 17 Deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si, et seulement si, elles sont les matrices d'un même endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n dans des bases différentes.

Preuve à faire en exercice.

Exercice 7 Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$..
Montrer que A et B sont semblables.

Proposition 18 Soit A et B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $rg(A) = rg(B)$

Preuve Elles sont associées à un même endomorphisme.

Proposition 19 Si A, B et P sont trois matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que :
P soit inversible et $B = P^{-1}AP$ alors : $\forall k \in \mathbb{N},\ B^k = P^{-1}A^kP$.

Preuve à faire en exercice.

IV Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme

1. Définitions

Définition 7 Soit E un espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
λ est valeur propre de f s'il existe un vecteur non nul x de E tel que $f(x) = \lambda x$.
x est alors appelé vecteur propre de f associé à la valeur propre λ et l'espace vectoriel $E_\lambda = \ker(f - \lambda id_E)$ est appelé le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ.
L'ensemble des valeurs propres de f est appelé le spectre de f et noté $Sp(f)$ ou $Spec(f)$.

Remarque - la condition $x \neq 0$ est essentielle sinon tout scalaire λ serait valeur propre !
- λ est valeur propre de $f \Leftrightarrow f - \lambda id_E$ n'est pas injectif ($\ker(f - \lambda id_E) \neq \{O_E\}$).

Exercice 8 Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ et φ l'application qui à f de E associe la primitive de f qui s'annule en 0.
Montrer que φ est un endomorphisme de E et déterminer les éléments propres de φ.

2. Famille de vecteurs propres

Proposition 20 Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Soit E_λ un sous-espace propre associé à une valeur propre λ de f alors $\dim E_\lambda \geqslant 1$.

Preuve $E_\lambda = \ker(f - \lambda id_E)$ est un sous-espace vectoriel de E non réduit à $\{O_E\}$ donc de dimension au moins égal à 1.

Proposition 21 Une famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
Autrement dit : soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ p valeurs propres deux à deux distinctes de f et $x_1, \cdots, x_p$ p vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$
Alors la famille $(x_1, \cdots, x_p)$ est libre.

Preuve Montrons le par récurrence sur p.
Si $p = 1$ alors comme (x_1) est une famille libre de E car $x_1 \neq 0_E$
Supposons que si $x_1, \cdots, x_p$ sont p vecteurs propres associés aux valeurs propres distinctes $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ de f alors $(x_1, \cdots, x_p)$ est libre.
Soit $x_1, \cdots, x_{p+1}$ $p+1$ vecteurs propres associés aux valeurs propres distinctes $\lambda_1, \cdots, \lambda_{p+1}$.
Montrons que $(x_1, \cdots, x_p, x_{p+1})$ est libre :
Soit $(*)$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{p+1} a_k x_k = 0_E$ en composant par f et par linéarité de f, on obtient $\displaystyle\sum_{k=1}^{p+1} a_k f(x_k) = 0_E$ et,
comme $\forall k \in [\![1, p+1]\!]$, $f(x_k) = \lambda_k x_k$, on obtient aussi $(\mathcal{E}_1)$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{p+1} a_k \lambda_k x_k = 0_E$.
En multipliant $(*)$ par λ_{p+1}, on obtient $(\mathcal{E}_2)$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{p+1} \lambda_{p+1} a_k x_k = 0_E$.
En effectuant la différence $(\mathcal{E}_1) - (\mathcal{E}_2)$, on en déduit que $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_k(\lambda_{p+1} - \lambda_k) x_k = 0_E$.
Comme $(x_1, \cdots, x_p)$ est libre, $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $a_k(\lambda_{p+1} - \lambda_k) = 0$.
Comme les valeurs propres sont distinctes deux à deux, $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $\lambda_{p+1} - \lambda_k \neq 0$ donc $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $a_k = 0$.
Il reste $a_{p+1} x_{p+1} = 0_E$ avec $x_{p+1} \neq 0_E$ donc $a_{p+1} = 0$.

Conséquence Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.

Un endomorphisme f de E possède au plus n valeurs propres distinctes.

Preuve Dans un espace vectoriel de dimension finie n, une famille libre a au plus n éléments.

Si l'endomorphisme f de E possède p valeurs propres distinctes alors, avec les notations de la proposition, $(x_1, \cdots, x_p)$ est libre donc $p \leqslant n$.

Proposition 22 Une famille finie obtenue par juxtaposition de bases de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Autrement dit : soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ p valeurs propres deux à deux distinctes de u.

Soit $\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_p$ des bases des sous-espaces propres $E_{\lambda_1}, \cdots, E_{\lambda p}$ respectivement.

Alors la famille $\mathcal{F} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_p$ est une famille libre de E.

De plus, si E est de dimension finie alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \dim E_{\lambda_k} \leqslant \dim E$.

3. Endomorphisme diagonalisable

Définition 8 Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Un endomporphisme f de E est dit diagonalisable si, et seulement s'il existe une base de E constituée de vecteurs propres de f.

Autrement dit, f est diagonalisable si, et seulement s'il existe une base $\mathcal{B} = (x_n)_{n\in I}$ de E et des scalaires $(\lambda_n)_{n\in I}$ tels que $\forall n \in I$, $f(x_k) = \lambda_k x_k$.

Exemple Toute homothétie de E est diagonalisable et admet pour seule valeur propre son rapport.

Proposition 23 Soit E un espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}$ une base de E, f un endomorphisme de E de matrice A relativement à la base $\mathcal{B}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

•λ est valeur propre de A si, et seulement si, λ est valeur propre de f

•un vecteur x de E est vecteur propre de f associé à la valeur propre λ si, et seulement si, la matrice colonne X des coordonnées de x dans la base est vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

Preuve Conséquences des définitions.

Proposition 24 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Soit $Sp(u) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_p\}$ l'ensemble des p valeurs propres de f.

Alors f est diagonalisable si, et seulement si, $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \dim E_{\lambda_k} = n$.

Preuve •Montrons que si $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \dim E_{\lambda_k} = n$ alors f est diagonalisable :

soit $\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_p$ des bases des sous-espaces propres $E_{\lambda_1}, \cdots, E_{\lambda p}$ respectivement.

On sait déjà que la famille $\mathcal{F} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_p$ est une famille libre de E.

De plus, $card \mathcal{F} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \dim E_{\lambda_k} = n$ donc $\mathcal{F}$ est une base de E.

•Réciproquement, montrons que si f est diagonalisable alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \dim E_{\lambda_k} = n$:

si f est diagonalisable alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E constituée de vecteurs propres de f.

Si $\mathcal{B}$ contient i_k vecteurs propres associés à la valeur propre λ_k alors ces i_k vecteurs sont linéairement indépendants car ils font partie d'une base.

Ces i_k vecteurs forment une partie libre de E_{λ_k} donc $i_k \leqslant \dim E_{\lambda_k}$

On en déduit que $card\mathcal{B} = \sum_{k=1}^{p} i_k \leqslant \sum_{k=1}^{p} \dim E_{\lambda_k}$.

Enfin, comme la juxtaposition des bases des sous-espaces propres E_{λ_k} est une famille libre, on a aussi, $\sum_{k=1}^{p} \dim E_{\lambda_k} \leqslant n$. On a bien $\sum_{k=1}^{p} \dim E_{\lambda_k} = n$.

Proposition 25 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Si f possède n valeurs propres deux à deux distinctes alors f est diagonalisable.Soit P

Preuve Comme les sous-espaces propres sont tous de dimension au moins égale à 1, si f possède n valeurs propres deux à deux distinctes alors les n sous-espaces propres sont tous de dimension égale à 1 et la réunion des bases de ces n sous-espaces propres est une base de E.

Exercice 9 Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et f l'application définie par : $\forall P \in E, f(P) = (X^2 - 1)P' - (3X + 1)P$.
Montrer que f est un endomorphisme de E.
Déterminer les éléments propres de f.
L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?