Corrigé DM8 Variables aléatoires à densité et partie entière

1. La fonction f est positive sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}$ sauf en 1.

L'intégrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{b}{2^t}\,\mathrm{d}t = b\int_1^{+\infty} e^{-t\ln 2}\,\mathrm{d}t$ est impropre en $+\infty$.

Soit $a \geqslant 1$. On pose $I(a) = \int_1^a e^{-t\ln 2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{\ln 2}e^{-t\ln 2}\right]_1^a = -\frac{1}{\ln 2}(e^{-a\ln 2} - e^{-\ln 2})$.

Comme $\lim\limits_{a\to+\infty} -\frac{1}{\ln 2}(e^{-a\ln 2} - e^{-\ln 2}) = \frac{e^{-\ln 2}}{\ln 2} = \frac{1}{2\ln 2}$, I est convergente et $I = \frac{1}{2\ln 2}$.

On en déduit que $\boxed{f \text{ est une densité de probabilité si, et seuelement si, } b = 2\ln 2}$.

2. **a.** Comme $X(\Omega) = [1, +\infty[$ et $Y = X - 1$, $Y(\Omega) = [0, +\infty[$.

Y est une fonction affine de X donc, une densité de Y est définie par

$$g(t) = f(t+1) = \begin{cases} \frac{2\ln 2}{2^{t+1}} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Comme $\frac{2\ln 2}{2^{t+1}} = \ln 2 e^{-t\ln 2}$, on reconnait alors que

$\boxed{Y \text{ suit une loi exponentielle de paramètre } \lambda = \ln 2}$.

b. On sait que Y ademet une espérance $E(Y) = \frac{1}{\ln 2}$ et une variance $V(Y) = \frac{1}{\ln^2 2}$.

Comme $X = Y + 1$, X admet une espérance $E(X) = E(Y) + 1$ et une variance $V(X) = V(Y)$.

On en conclut que $\boxed{X \text{ admet une espérance } E(X) = \frac{1}{\ln 2} + 1 \text{ et une variance } V(X) = \frac{1}{\ln^2 2}}$.

3. **a.** Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$ et $V = -\frac{1}{\lambda}\ln U$.

$U(\Omega) =]0,1]$ et $\lambda > 0$ donc $V(\Omega) = [0, +\infty[$.

Soit $x \geqslant 0$ alors $P(V \leqslant x) = P\left(-\frac{1}{\lambda}\ln U \leqslant x\right) = P(U \geqslant e^{-\lambda x}) = 1 - P(U < e^{-\lambda x})$.

Comme $x \geqslant 0$, $e^{-\lambda x} \in]0,1]$ donc $P(U < e^{-\lambda x}) = F_U(e^{-\lambda x}) = e^{-\lambda x}$ où F_U est la fonction de répartition de U.

On pose alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_V(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

On reconnait la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

On en conclut que $\boxed{\text{la variable } -\frac{1}{\lambda}\ln U \text{ suit une loi exponentielle de paramètre } \lambda}$.

b. On utilise la fonction `random` pour simuler U, puis, en choisissant $\lambda = \ln 2$, on simule la variable Y et on renvoie une réalisation de la variable $X = Y + 1$:

```python
import random as rd
import numpy as np
def X():
    U=rd.random()
    return -np.log(U)/np.log(2) + 1
```

4. **a.** Comme $Z = \lfloor X \rfloor$, pour simuler Z sous Python on utilise la fonction `floor` et la fonction X précédente.

De plus, comme Z est à valeur entière, on peut utiliser la fonction `int` qui transforme un flottant en entier :

```python
def Z():
    return int(np.floor(X()))
```

b. Pour estimer l'espérance de Z, on calcule la moyenne arithmétique d'un grand nombre de réalisations de Z :

```python
def moyZ(N):
    return sum([Z() for _ in range(N)])/N
```

Avec l'instruction `print(moyZ(100000))`,
$\boxed{\text{on peut conjecturer que } Z \text{ admet une espérance et que } E(Z) = 2}$.

c. Comme $X(\Omega) = [1,+\infty[$ et $Z = \lfloor X \rfloor$, $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$P(Z = n) = P(\lfloor X \rfloor = n) = P(n \leqslant X < n+1) = P(n-1 \leqslant Y < n) = F_Y(n) - F_Y(n-1)$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(Z = n) = (1 - e^{-n\ln 2}) - (1 - e^{-(n-1)\ln 2}) = -\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}\left(-\frac{1}{2} + 1\right)$.
On en déduit que $\boxed{Z(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(Z = n) = \frac{1}{2^n}}$.
En remarquant que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(Z = n) = \frac{1}{2^n} = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-1}\frac{1}{2}$, on en conclut que
$\boxed{Z \text{ suit une loi géométrique de paramètre } \frac{1}{2},\ Z \text{ admet une esérance et } E(Z) = 2}$ ce qui est cohérent avec la conjecture faite en **4b**.