DM9	Variables aléatoires à densité et convolution

pour jeudi 8 février

On rappelle que si U et V sont deux variables à densité indépendantes de densité f_U et f_V respectivement alors $W = U + V$ est une variable à densité dont une densité est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_W(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t) f_V(x-t)\, \mathrm{d}t.$$

Soit λ et μ deux nombres réels strictement positifs.

1. On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivant toutes deux la même loi exponentielle de paramètre λ.

a. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z = -\mu X$.

b. Soit $R_\mu = Y - \mu X$.
Montrer que R_μ est une variable à densité dont une densité est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_\mu(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\mu+1} e^{-\lambda x} \text{ si } x \geqslant 0 \\ \dfrac{\lambda}{\mu+1} e^{\frac{\lambda}{\mu} x} \text{ si } x < 0 \end{cases}.$$

2. Écrire une fonction Python $MaxRacine(a, b)$ qui prend en arguments deux flottants a et b et renvoie la plus grand racine réelle du trinôme $x^2 + ax + b$ s'il admet des racines réelles et la liste vide sinon.

3. On considère le trinôme

$$Q(t) = t^2 + Xt - Y$$

où X et Y sont les variables aléatoires définies à la question **1**.

a. Montrer que Q admet presque sûrement deux racines réelles distinctes.
On note S la plus petite et T la plus grande de ces deux racines réelles.
Justifier que $S < 0 < T$ presque sûrement.

b. On rappelle que si U suit la loi uniforme sur $]0, 1]$ alors $-\dfrac{1}{\lambda} \ln U$ suit la loi exponentielle de paramètre λ.
Écrire une fonction Python `T()` qui utilise la fonction de la question **2**. et simule la variable aléatoire T.

c. En déduire une fonction Python `EspT()` qui renvoie une estimation de l'espérance de la variable aléatoire T.
Donner alors une valeur approchée de l'espérance de T pour $\lambda = 1$.

4. **a.** Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ [T \leqslant t] = [Y - tX \leqslant t^2]$.

b. En déduire que T est une variable à densité et en donner une densité.

c. La variable T admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.