Applications linéaires - Matrices - Réduction

Ce qu'il faut connaître :
-la définition d'une application linéaire
-le vocabulaire : morphisme, forme linéaire, endomorphisme, isomorphisme, automorphisme
-les exemples fondamentaux d'applications linéaires
-les définitions de image et noyau d'une application linéaire
-le théorème du rang
-la caractérisation d'un morphisme injectif, surjectif, bijectif
-les définitions de valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme
-la réunion des bases des sous-espaces propres est une famille libre
-la définition d'un endomorphisme diagonalisable
-la CNS de diagonalisabilité en dimension finie : $\sum_{k=1}^{p} \dim E_{\lambda_k} = \dim E$
-la CS de diagonalisabilité en dimension finie n : l'existence de n valeurs propres disctinctes
-la formule matricielle de changement de base $A' = P^{-1}AP$
-la définition de matrices semblables
-l'égalite des spectres dans le cas de matrices semblables

En dimension finie
soit E de dimension p et F de dimension n

1. **Comment montrer qu'une application $f : E \to F$ est une application linéaire**
   a. On vérifie que les composantes $(y_1, \cdots, y_n) = f(x_1, \cdots, x_p)$ s'expriment comme combinaison linéaire des $x_1, \cdots, x_p$
   b. On détermine la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle $(y_1, \cdots, y_n) = f(x_1, \cdots, x_p) \Leftrightarrow Y = AX$

2. **Comment déterminer le rang d'une application linéaire $f : E \to F$**
   a. On détermine la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{F}$ engendré par les images des vecteurs d'une base $\mathcal{B}_p$ de E : nombre maximum de vecteurs linéairement indépendants de $f(\mathcal{B}_p)$
   b. On détermine le rang de la matrice A (= nombre de pivots de A) associée à f alors $rg(f) = rg(A)$

3. **Comment déterminer le noyau et l'image d'une application linéaire $f : E \to F$**
   a. Si on connait déjà $rg(f) = r$ alors
   -$p - r$ vecteurs linéairement indépendants du noyau constituent une base de $\ker f$
   -r vecteurs linéairement indépendants de l'image constituent une base de $\mathrm{Im} f$
   b. -On échelonne le système linéaire $AX = Y$
   -$\ker f$ est le sous-espace vectoriel de E des solutions du système linéaire homogène $AX = 0_n$
   -les équations de $\mathrm{Im} f$ sont données par les relations de compatibilité du système $AX = Y$

4. **Comment montrer qu'une application linéaire $f : E \to F$ est injective**
   a. Si on connait déjà $rg(f)$, on vérifie que $rg(f) = p$
   b. On détermine le noyau de f et on vérifie que $\ker f = \{0_p\}$

5. **Comment montrer qu'une application linéaire $f : E \to F$ est surjective**
   a. Si on connait déjà $rg(f)$, on vérifie que $rg(f) = n$
   b. On détermine l'image de f et on vérifie que $\mathrm{Im} f = F$

6. **Comment montrer qu'un endomorphisme $f : E \to E$ est bijectif**
   a. On détermine le noyau de f et on vérifie que $\ker f = \{0_E\}$ (f est injective donc bijective)
   b. Si on connait déjà $rg(f)$, on vérifie que $rg(f) = \dim E$
   c. On montre que la matrice de f dans n'importe quelle base de E est inversible
   d. Si on connait déjà l'image de f et on vérifie que $\mathrm{Im} f = E$ (f est surjective donc bijective)

7. **Comment montrer qu'un endomorphisme $f : E \to F$ est diagonalisable**
   on peut déterminer la matrice A de f dans des bases de E et de F et utiliser les méthodes matricielles

Dans le cas général

8. Comment montrer qu'une application $f : E \to F$ est une application linéaire

-On vérifie que E et F sont bien deux espaces vectoriels

-On prend deux vecteurs quelconques u et v de E et un scalaire λ de $\mathbb{K}$
et on montre que $f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$

9. Comment montrer qu'une application $f : E \to F$ n'est pas une application linéaire

a. On montre que $f(0_E) \neq 0_F$

b. On trouve deux vecteurs u et v de E pour lesquels $f(u + v) \neq f(u) + f(v)$

c. On trouve un vecteur u de E et un scalaire λ de $\mathbb{K}$ tels que $f(\lambda u) \neq \lambda f(u)$.

10. Comment montrer qu'une application f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E

-On s'assure que E est bien un espace vectoriel

-On montre que $\forall u \in E, f(u) \in E$

-On vérife que f est linéaire (cf. **8**.)

11. Comment déterminer le noyau d'une application linéaire $f : E \to F$

On cherche le sous-espace vectoriel de E des vecteurs u de E qui vérifient $f(u) = 0_F$

12. Comment déterminer l'image d'une application linéaire $f : E \to F$

On cherche le sous-espace vectoriel de F des vecteurs v pour lesquels
il existe un vecteur u de E tel que $f(u) = v$

13. Comment montrer qu'une application linéaire $f : E \to F$ est injective

On prend un vecteur quelconque u de E et on montre l'implication : $f(u) = 0_F \Rightarrow u = 0_E$

Autrement dit, on montre que $\ker f = \{0_E\}$

14. Comment montrer qu'une application linéaire $f : E \to F$ est surjective

On prend un vecteur quelconque v de F et on montre qu'il existe un vecteur u de E tel que $f(u) = v$

Autrement dit, on montre que $\mathrm{Im} f = F$

15. Comment montrer qu'une application $f : E \to F$ est un isomorphisme

-on montre que f est linéaire (cf **8**.)

a. -On montre que f est injective (cf **13**.)
-On montre que f est surjective (cf **14**.)

b. On prend un vecteur quelconque v de F et on montre qu'il existe un unique vecteur u de E tel que $f(u) = v$, dans ce cas l'application qui à v de F associe u de E est f^{-1}

c. On montre qu'il existe une application linéaire $g : F \to E$ telle que :
$\begin{cases} g \circ f = id_E \\ f \circ g = id_F \end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases} \forall u \in E, \ g(f(u)) = u \\ \forall v \in F, \ f(g(v)) = v \end{cases}$, dans ce cas, $g = f^{-1}$

16. Comment déterminer les éléments propres d'un endomorphisme f d'un espace vectoriel E

-on cherche les scalaires λ pour lesquels il existe un vecteur x non nul de E tel que $f(x) = \lambda x$

-pour chaque valeur propre λ, on détermine l'ensemble des vecteurs x de E tels que $f(x) = \lambda x$