TD 14 : Applications linéaires - diagonalisation

1 Exercices d'application du cours

1 Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$f(e_1) = e_2 - e_3, \quad f(e_2) = -2e_2 + 2e_3, \quad f(e_3) = e_1 + e_4, \quad f(e_4) = e_1 + e_2 - e_3 + e_4.$$

1. Écrire la matrice A de f dans la base canonique.
2. Déterminer $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$ (bases et dimensions attendues).

2 Soit un réel m et $f_m : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ définie par

$$f_m(x, y, z) = (x + (m-1)y, 2x - 2y + 2mz, 2y - 4z, 2mz).$$

1. Justifier que f_m est linéaire.
2. Donner la matrice A_m de f_m dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$.
3. Déterminer le noyau et l'image de f_m suivant la valeur du réel m.
4. Quelles sont les valeurs de m pour lesquelles f_m est injective ? surjective ? un isomorphisme ?

3 On considère l'application f définie par :

$$f(P) = P - (X+1)\,P'.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer une base de l'image et du noyau de f.

2 Exercices classiques

4 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et soit φ l'application de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$\varphi : M \mapsto AM - MA.$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
3. L'endomorphisme φ est-il injectif ? surjectif ? Déterminer $\operatorname{Im}\varphi$ et $\ker\varphi$.
4. Que peut-on dire de φ^2 et de φ^3 ?

5 Soit l'espace vectoriel $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ et soit $D : E \to E$ l'application définie par :

$$\forall f \in E \quad D(f) = f'.$$

1. Justifier que D est un endomorphisme de E. Cet endomorphisme est-il injectif ? surjectif ?
2. On considère l'ensemble

$$F = \left\{x \mapsto (ax+b)\,e^x + (cx+d)\,e^{2x} \mid (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4\right\}.$$

   (a) Montrer que F est un espace vectoriel dont on en donnera une base $\mathscr{B}$ et la dimension.
   (b) Montrer que la restriction D_F de D à F, c'est-à-dire, l'application définie sur F par $\forall f \in F$, $D_F(f) = f'$, est un endomorphisme de F.
   (c) Donner la matrice de D_F dans la base $\mathscr{B}$.
   (d) Cet endomorphisme est-il injectif ? surjectif ?

3 Diagonalisation

$\boxed{6}$ On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et on définit l'application suivante :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

$\boxed{7}$ Soit $n \in \mathbb{N}$, et $E = \mathbb{K}_n[X]$. Pour tout polynôme P de E on définit le polynôme $u(P)$ par :

$$u(P) = (X^2 - 1)\, P''.$$

1. Vérifier que u est un endomorphisme de E.
2. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

$\boxed{8}$ Soit $n \in \mathbb{N}$, et g l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$, par :

$$g(P) = (X - 1)\, P' - P.$$

1. Justifier que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on définit le polynôme $P_k = (X - 1)^k$.
   (a) Calculer $g(P_k)$.
   (b) En déduire que g est diagonalisable.
3. L'endomorphisme g est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$?

4 Autre exercice

$\boxed{9}$ Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour toute fonction f de E on définit une fonction notée $T(f)$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (T(f))(x) = \int_0^x t\, f(t)\, dt.$$

1. Montrer que $T(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et donner sa fonction dérivée.
2. Montrer que T est un endomorphisme de E puis que T est injectif.
3. (a) En utilisant le fait que pour toute fonction f de E, $T(f)$ est dérivable si $f \in E$, justifier que T n'est pas surjectif.
   (b) L'espace vectoriel E est-il de dimension finie ?