Semaine 18
du lundi 19 au vendredi 23 février 2024

Applications linéaires et matrices

Application linéaire, endomorphisme, isomorphisme. Espaces isomorphes

Notation $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{L}(E)$

Opérations sur les applications linéaires : addition, multiplication par un scalaire, composition, réciproque

Propriétés de ces opérations

Notation f^n pour $n \geqslant 0$

Noyau, lien avec l'injectivité, sous-espace vectoriel de l'espace de départ

Image, lien avec la surjectivité, sous-espace vectoriel de l'espace d'arrivée

Cas de la dimension finie :

Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base

Une application linéaire est un isomorphisme si, et seulement si, l'image d'une base est une base

Tout espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$

Rang d'une application linéaire

Théorème du rang

Pour une application linéaire entre deux espaces de même dimension, il y a équivalence entre l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité

Matrice d'une application linéaire d'un espace de dimension finie dans un espace de dimension finie, une base ayant été choisie dans chacun d'eux

Matrice de la somme de deux applications linéaires, du produit par un scalaire d'une application linéaire, de la composée de deux applications linéaires, de l'application réciproque

Un endomorphisme est bijectif si, et seulement si, sa matrice, dans une base quelconque, est inversible, il suffit de disposer d'une matrice inverse à gauche ou à droite

Interprétation d'une matrice comme application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$

Cette interprétation permet de parler d'image, de noyau et de rang de la matrice en lien avec les mêmes notions pour les applications linéaires

Changement de base

Matrice de passage

Action d'un changement de base sur la matrice des coordonnées d'un vecteur

Action d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme

Matrices semblables

Diagonalisation

Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres d'un endomorphisme, spectre d'un endomorphisme

En dimension finie, lien entre les éléments propres d'un endomorphisme et ceux d'une matrice qui le représente dans une base

Une famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres disctinctes est libre

Une famille finie obtenue par juxtaposition de bases de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est libre

En dimension finie, endomorphisme diagonalisable (matrice diagonalisable)

Un endomorphisme en dimension n (une matrice carrée d'ordre n) est diagonalisable si, et seulement si, la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à n

Un endomorphisme en dimension n (une matrice carrée d'ordre n) ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable, les sous-espaces propres sont alors de dimension 1

Questions de cours

Définitions de image et noyau d'une application linéaire de E vers F
Théorème du rang pour une application linéaire $f : E \to F$
Caractériser les applications linéaires de E vers F injectives, surjectives, bijectives
Écriture matricielle de l'image d'un vecteur par une application linéaire en dimension finie
Définition du rang d'une application linéaire de E vers F
Formule de changement de base pour la matrice d'un endomorphisme de E de dimension finie
Définition de matrices semblables
Définition de valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre d'un endomorphisme
Que peut-on dire d'une famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes ?
Que peut-on dire de la juxtaposition de bases de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes ?
Définition d'un endomorphisme diagonalisable
Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité d'un endomorphisme en dimension finie
Condition suffisante de diagonalisabilité d'un endomorphisme en dimension finie