Produit scalaire

I Produit scalaire

1. Définitions

Rappel $\mathbb{R}^n$, muni de l'addition et du produit par un scalaire, est un espace vectoriel de dimension n.
La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est $\mathcal{C}_n = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ où
$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$
Pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^n$, $\exists!(x_1, \ldots, x_n) \mid u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

Définition 1 Pour tous vecteurs u et v de $\mathbb{R}^n$, le produit scalaire de u par v est le nombre réel noté $\langle u, v\rangle$, $u \bullet v$, $(u|v)$ ou $\langle u|v\rangle$ défini par : si $u = (x_1, \ldots, x_n)$ et $v = (y_1, \ldots, y_n)$, $\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Écriture matricielle du produit scalaire :
Soit X et Y les matrices colonnes des coordonnées des vecteurs u et v respectivement dans la base $\mathcal{C}_n$ alors $u \bullet v = {}^tXY$.

Proposition 1 Le produit scalire est une forme bilinéaire symétrique positive :
$\bullet \forall (u, v) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\langle u, v\rangle \in \mathbb{R}$ (forme)
$\bullet \forall (u, v, w) \in (\mathbb{R}^n)^3$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\langle \lambda u + \mu v, w\rangle = \lambda\langle u, w\rangle + \mu\langle v, w\rangle$ (bilinéaire)
$\bullet \forall (u, v) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$ (symétrique)
$\bullet \forall u \in \mathbb{R}^n$, $\langle u, u\rangle \geqslant 0$ (positive)

Définition 2 On appelle norme euclidienne d'un vecteur u de $\mathbb{R}^n$ le réel $\sqrt{\langle u, u\rangle}$.
Si $u = (x_1, \ldots, x_n)$, on note $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.
Un vecteur u de $\mathbb{R}^n$ est dit unitaire si, et seulement si, $\|u\| = 1$

Remarque $\|u\| = 0 \iff u = 0$. En effet, $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \iff \forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = 0$

Exercice 1 Dans $\mathbb{R}^4$, soit $u = (1, 2, 3, 4)$ et $v = (1, -1, 1, -1)$. Calculer $\langle u, v\rangle$, $\|u\|$ et $\|v\|$.

2. Propriétés

Proposition 2 Inégalité de Cauchy-Schwarz : $\forall (u, v) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $|\langle u, v\rangle| \leqslant \|u\|\|v\|$
De plus, $|\langle u, v\rangle| = \|u\|\|v\| \Leftrightarrow u$ et v sont colinéaires.

Preuve comme le carré scalaire de tout vecteur est positif, on a :
$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\langle \lambda u + v, \lambda u + v\rangle \geqslant 0$
$\Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda^2\|u\|^2 + 2\lambda\langle u, v\rangle + \|v\|^2 \geqslant 0$
$\Leftrightarrow \Delta = 4\left(\langle u, v\rangle^2 - \|u\|^2\|v\|^2\right) \leqslant 0$
$\Leftrightarrow \langle u, v\rangle^2 \leqslant \|u\|^2\|v\|^2$
$\Leftrightarrow |\langle u, v\rangle| \leqslant \|u\|\|v\|$
De plus, $|\langle u, v\rangle| = \|u\|\|v\| \Leftrightarrow \Delta = 0$
$\Leftrightarrow \lambda^2\|u\|^2 + 2\lambda\langle u, v\rangle + \|v\|^2 = 0$ admet une unique racine $\lambda = -\dfrac{\langle u, v\rangle}{\|u\|^2}$
Comme, $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$, $|\langle u, v\rangle| = \|u\|\|v\| \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda u + v = 0$

Proposition 3 Inégalité triangulaire : $\forall(u,v) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ \|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$

Preuve $\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2$

Or $\langle u,v\rangle \leqslant |\langle u,v\rangle| \leqslant \|u\|\|v\|$ donc $\|u+v\|^2 \leqslant \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2$

c'est-à-dire $\|u+v\|^2 \leqslant (\|u\| + \|v\|)^2$.

3. Orthogonalité

Définition 3 Soit u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

On dit que u et v sont orthogonaux, et on note $u \perp v$, si, et seulement si, $\langle u,v\rangle = 0$

Proposition 4 Toute famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, non nuls et deux à deux orthogonaux, est libre

Preuve Soit $\mathcal{F} = \{u_1, \cdots, u_p\}$ une famille de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$, non nuls et deux à deux orthogaonaux.

Montrons que $\mathcal{F}$ est libre.

Soit $(a_1, \cdots, a_p) \in \mathbb{R}^p \mid a_1u_1 + \cdots a_pu_p = 0$ alors, pour tout i de $[\![1,p]\!]$, $\langle a_1u_1 + \cdots a_pu_p, u_i\rangle = 0$.

Or $\forall(i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow \langle u_i, u_j\rangle = 0$ on en déduit que : $\forall i \in [\![1,p]\!],\ a_i\langle u_i, u_i\rangle = 0$.

Enfin, comme $u_i \neq 0,\ \langle u_i, u_i\rangle \neq 0$ et donc $\forall i \in [1,p],\ a_i = 0$.

Proposition 5 Théorème de Pythagore

$\forall(u,v) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ u \perp v \Leftrightarrow \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

Preuve en exercice

4. Bases orthonormales

Définition 4 $\mathcal{B} = (u_1, \cdots, u_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow \forall(i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \langle u_i, u_j\rangle = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$

Exemple La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormale

Proposition 6 admis

Tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ admet une base orthonormale

Exercice 2 Dans $\mathbb{R}^4$, soit $u = (1,1,1,1), v = (0,1,0,1), w = (0,0,1,0)$ et $E = \text{vect}(u,v,w)$.

Montrer que $\mathcal{B} = (u,v,w)$ est une base de E.

Construire une base orthonormale (a,b,c) de E telle que $\begin{cases} \text{vect}(a) = \text{vect}(u) \\ \text{vect}(a,b) = \text{vect}(u,v) \end{cases}$.

Remarque Le produit scalaire et la norme se calculent de la même manière dans toutes les bases orthonormales de $\mathbb{R}^n$. En effet, soit $\mathcal{B} = (u_1, \cdots, u_n)$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$, $u = \sum_{i=1}^{n} x_iu_i$ et $v = \sum_{j=1}^{n} y_ju_j$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Alors $u \cdot v = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_iu_i, \sum_{j=1}^{n} y_ju_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_iy_j\langle u_i, u_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$ car $\langle u_i, u_j\rangle = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$.

Proposition 7 Soit $\mathcal{C}_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B} = u_1, \cdots, u_n$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$

Soit P la matrice de passage de $\mathcal{C}_n$ à $\mathcal{B}$ alors ${}^tPP = I_n$.

Preuve Soit $M = {}^tPP = (m_{ij})_{(i,i)\in[\![1,n]\!]^2}$ et $P = (p_{ij})_{(i,i)\in[\![1,n]\!]^2}$, alors $\forall(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $m_{ij} = \sum_{k=1}^{n} p_{ki}p_{kj}$.

Or $u_i = \sum_{k=1}^{n} p_{ki}e_k$ et $u_j = \sum_{\ell=1}^{n} p_{\ell j}e_\ell$ donc $\langle u_i, u_j\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} p_{ki}e_k, \sum_{\ell=1}^{n} p_{\ell j}e_\ell \right\rangle = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} p_{ki}p_{\ell j}\langle e_k, e_\ell\rangle$.

Comme $\langle e_k, e_\ell\rangle = 1$ si $k = l$ et 0 sinon, $\langle u_i, u_j\rangle = \sum_{k=1}^{n} p_{ki}p_{kj} = m_{ij}$.

Enfin, comme $\langle u_i, u_j\rangle = 1$ si $i = j$ et 0 sinon, $\forall(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $m_{ij} = 1$ si $i = j$ et 0 sinon.

Proposition 8 : **Théorème spectral**

• Deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes d'une matrice symétrique réelle sont orthogonaux.

• Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée.

Preuve Ce théorème est admis

II Projection orthogonale

1. Orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Définition 5 Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

L'orthogonal de F, noté $F^\perp$, est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de F.

$F^\perp = \left\{u \in \mathbb{R}^n \mid \forall v \in F, \langle u, v\rangle = 0\right\}$.

Proposition 8 Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ alors

•$F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

•$F \cap F^\perp = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

•$\forall u \in \mathbb{R}^n$, $\exists!(u_F, u_{F^\perp}) \in F \times F^\perp \mid u = u_F + u_{F^\perp}$.

Preuve •Par définition $F^\perp \subset \mathbb{R}^n$

$\forall v \in F$, $\langle 0_{\mathbb{R}^n}, v\rangle = 0$ donc $0_{\mathbb{R}^n} \in F^\perp$

$\forall(u, u') \in F^{\perp 2}$, $\forall\lambda \in \mathbb{R}$, $\forall v \in F$, $\langle \lambda u + u', v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle + \langle u', v\rangle = 0$ donc $\lambda u + u' \in F^\perp$.

•Soit $u \in F \cap F^\perp$ alors $\langle u, u\rangle = 0$ donc $u = 0_{\mathbb{R}^n}$.

•Soit $p = \dim F$, $(u_1, \cdots, u_p)$ une base orthonormale de F que l'on complète en une base orthonormale $(u_1, \cdots, u_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

Alors, $\forall u \in \mathbb{R}^n$, $\exists!(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid u = \sum_{i=1}^{n} x_iu_i = \sum_{i=1}^{p} x_iu_i + \sum_{i=p+1}^{n} x_iu_i$.

En posant $u_F = \sum_{i=1}^{p} x_iu_i$ et $u_{F^\perp} = \sum_{i=p+1}^{n} x_iu_i$, on a bien $(u_F, u_{F^\perp}) \in F \times F^\perp$ et $u = u_F + u_{F^\perp}$.

Montrons l'unicité : supposons que :$\exists(u_F, u_{F^\perp}) \in F \times F^\perp$ et

$\exists(u'_F, u'_{F^\perp}) \in F \times F^\perp \mid u = u_F + u_{F^\perp} = u'_F + u'_{F^\perp}$

alors $u_F - u'_F = u'_{F^\perp} - u_{F^\perp} \in F \cap F^\perp$ donc $u_F - u'_F = u'_{F^\perp} - u_{F^\perp} = 0_{\mathbb{R}^n}$ et $u_F = u'_F$, $u_{F^\perp} = u'_{F^\perp}$.

Exercice 3 Dans $\mathbb{R}^4$, soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0\}$.

Déterminer l'orthogonal de F.

2. Projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$

Définition 6 La projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$ sur F est l'endomorphisme p de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$\forall u \in \mathbb{R}^n$, $\exists!(u_F, u_{F^\perp}) \in F \times F^\perp \mid u = u_F + u_{F^\perp}$ alors $p(u) = u_F$.

Remarque Montrons que p est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$: $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$
$\exists!(u_F, u_{F^\perp}) \in F \times F^\perp \mid u = u_F + u_{F^\perp}$ et $\exists!(v_F, v_{F^\perp}) \in F \times F^\perp \mid v = v_F + v_{F^\perp}$
donc $\lambda u + v = \lambda(u_F + u_{F^\perp}) + v_F + v_{F^\perp} = (\lambda u_F + v_F) + (\lambda u_{F^\perp} + v_{F^\perp})$.
Comme $\lambda u_F + v_F \in F$ et $\lambda u_{F^\perp} + v_{F^\perp} \in F^\perp$, $p(\lambda u + v) = \lambda u_F + v_F = \lambda p(u) + p(v)$ donc p est linéaire.
De plus, $\forall u \in \mathbb{R}^n$, $p(u) = u_F \in \mathbb{R}^n$ donc p est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 9 Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$ sur F. Alors :
- $p \circ p = p$
- $\mathrm{Im} p = F$
- $\ker p = F^\perp$

Preuve • $\forall u \in \mathbb{R}^n$, $\exists!(u_F, u_{F^\perp}) \in F \times F^\perp \mid u = u_F + u_{F^\perp}$ alors $p(u) = u_F$ donc $p(p(u)) = u_F = p(u)$.
• Soit $v \in \mathbb{R}^n$.
$v \in \mathrm{Im} p \Leftrightarrow \exists u \in \mathbb{R}^n \mid v = p(u)$ or $p(u) = u_F \in F$ donc $\mathrm{Im} p \subset F$.
Soit $v \in F$ alors $p(v) = v \in \mathrm{Im} p$ donc $F \subset \mathrm{Im} p$.
•Soit $u \in \mathbb{R}^n$ alors $\exists!(u_F, u_{F^\perp}) \in F \times F^\perp \mid u = u_F + u_{F^\perp}$.
$u \in \ker p \Leftrightarrow p(u) = 0 \Leftrightarrow u_F = 0 \Leftrightarrow u = u_{F^\perp}$ donc $u \in \ker p \Leftrightarrow u \in F^\perp$.

Proposition 10 Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $(u_1, \cdots, u_p)$ une base orthogonale de F.
La projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$ sur F est définie par : $\forall u \in \mathbb{R}^n$, $p(u) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\langle u, u_i \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle} u_i$.

Preuve Soit $u \in \mathbb{R}^n$, on pose $u_F = \sum_{i=1}^{p} \frac{\langle u, u_i \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle} u_i$, on a bien $u_F \in F$. Montrons que $u - u_F \in F^\perp$:
$\forall j \in [\![1,p]\!]$, $\langle u - u_F, u_j \rangle = \left\langle u - \sum_{i=1}^{p} \frac{\langle u, u_i \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle} u_i, u_j \right\rangle = \langle u, u_j \rangle - \sum_{i=1}^{p} \frac{\langle u, u_i \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle} \langle u_i, u_j \rangle$.
Or $\langle u_i, u_j \rangle = 0$ si $i \neq j$ car la base $(u_1, \cdots, u_p)$ est orthogonale donc
$\sum_{i=1}^{p} \frac{\langle u, u_i \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle} \langle u_i, u_j \rangle = \frac{\langle u, u_j \rangle}{\langle u_j, u_j \rangle} \langle u_j, u_j \rangle$
et $\forall j \in [\![1,p]\!]$, $\langle u - u_F, u_j \rangle = \langle u, u_j \rangle - \langle u, u_j \rangle = 0$. On a bien $u - u_F \in F^\perp$.
Ainsi, $\forall u \in \mathbb{R}^n$, $u = u_F + u_{F^\perp}$ où $u_F = \sum_{i=1}^{p} \frac{\langle u, u_i \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle} u_i \in F$, $u_{F^\perp} = u - u_F \in F^\perp$
et $p(u) = u_F = \sum_{i=1}^{p} \frac{\langle u, u_i \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle} u_i$.

Remarque Si $\mathcal{B} = (u_1, \cdots, u_p)$ est une base orthonormale de F alors $\forall u \in \mathbb{R}^n$, $p(u) = \sum_{i=1}^{p} \langle u, u_i \rangle u_i$.

Exercice 4 Dans $\mathbb{R}^4$, soit $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0\}$.
Déterminer le projeté orthogonal du vecteur $u = (1,1,1,1)$ sur F.

Exercice 5 Dans $\mathbb{R}^4$, soit $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0\}$.
Soit p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^4$ sur F.
Déterminer la matrice de p dans la base canonique $\mathcal{C}_4$ de $\mathbb{R}^4$.
1ère méthode : soit $u \in \mathbb{R}^4$, exprimer les coordonnées de $p(u)$ en fonction de celles de u.
2e méthode : déterminer une base orthonormale $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ constituée de vecteurs propres de p puis utiliser la formule de changement de bases pour la matrice d'un endomorphisme.

3. Distance dans $\mathbb{R}^n$

Définition 7 On appelle distance entre deux vecteurs u et v de $\mathbb{R}^n$ le nombre réel positif $\|u-v\|$.

Exercice 6 dans $\mathbb{R}^4$, calculer la distance entre $u = (1,1,1,1)$ et $v = (0,1,0,1)$.

Définition 8 Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et u un vecteur de $\mathbb{R}^n$.
On appelle distance de u à F la borne inférieure des distances de u aux vecteurs de F.
Autrement dit : $d(u,F) = \inf\{\|u-v\| \mid v \in F\}$.

Proposition 11 Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et p la projection orthogonale sur F. Alors
•Soir $u \in \mathbb{R}^n$, $d(u,F) = \|u-p(u)\|$
•Soit $u \in \mathbb{R}^n$, $\forall v \in F,\ \|u-v\| = d(u,F) \Leftrightarrow v = p(u)$.

Preuve par définition, $d(u,F) = \inf\{\|u-v\| \mid v \in F\}$.
Comme $u = p(u) + (u-p(u))$,

$$\begin{aligned}\forall v \in F,\ \|u-v\|^2 &= \|p(u)-v+(u-p(u))\|^2\\ &= \|p(u)-v\|^2 + \|u-p(u)\|^2 + 2\langle p(u)-v, u-p(u)\rangle\end{aligned}$$

or, $p(u)-v \in F$ et $u-p(u) \in F^\perp$ donc $\langle p(u)-v, u-p(u)\rangle = 0$
et $\forall v \in F,\ \|u-v\|^2 = \|p(u)-v\|^2 + \|u-p(u)\|^2$
On en déduit que $\|u-v\|^2$ est minimum lorsque $\|p(u)-v\| = 0$ soit $v = p(u)$.
ainsi $d(u,F) = \|u-p(u)\|$ et $\forall v \in F,\ \|u-v\| = d(u,F) \Leftrightarrow v = p(u)$.

Exercice 7 Dans $\mathbb{R}^4$, soit $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y = 0\}$ et $u = (1,1,1,1)$. Calculer $d(u,F)$.

III Éléments de géométrie affine dans le plan

1. Vecteurs du plan

a. Colinéarité

• Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires
• $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid \vec{v} = \lambda\vec{u}$
• $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ colinéaires $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow u_1v_2 - u_2v_1 = 0$

b. Orthogonalité

$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = 0 \Leftrightarrow u_1v_1 + u_2v_2 = 0$

c. Norme d'un vecteur

soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ est $\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u}\rangle} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$

d. Distance entre deux points

Soit $A(a_1,a_2)$ et $B(b_1,b_2)$ deux points.
Alors $d = AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2}$

2. Droites du plan

a. Représentation d'une droite définie par un point et un vecteur

Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par $A(a,b)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

alors $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires :

- une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$: $\begin{cases} x = a + \lambda u_1 \\ y = b + \lambda u_2 \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

- une équation cartésienne de $\mathcal{D}$: $\begin{vmatrix} x-a & u_1 \\ y-b & u_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow u_2(x-a) - u_1(y-b) = 0$

b. Représentation d'une droite définie par deux points

Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par deux points distincts A et B
alors $\mathcal{D}$ est définie par le point A et le vecteur directeur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ (cf ci-dessus)

c. Représentation d'une droite définie par un point et un vecteur normal

Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par un point $A(a,b)$ et de vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$

alors $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $\left\langle \vec{n}, \overrightarrow{AM} \right\rangle = 0 \Leftrightarrow n_1(x-a) + n_2(y-b) = 0$

d. Éléments caractéristiques d'une droite

• Soit $\mathcal{D}$ la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = a + \lambda u_1 \\ y = b + \lambda u_2 \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

alors $\mathcal{D}$ passe par $A(a,b)$ et admet pour vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

• Soit $\mathcal{D}$ la droite définie par une équation cartésienne $ax + by = c$

alors $\mathcal{D}$ admet pour vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ et pour vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

e. Intersection de deux droites

• Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$, de vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ respectivement

alors $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes $\Leftrightarrow$ $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont non colinéaires $\Leftrightarrow$ $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont non colinéaires.

• Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites d'équations $ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$ respectivement alors

$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ est de Cramer

Dans ce cas, $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \{M(x_0, y_0)\}$ où (x_0, y_0) est l'unique solution du système.

$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0.$

Exercice 8 1) Soit le point $A(5,7)$et la doite Δ d'équation $2x + 3y + 7 = 0$

Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ passant par A et perpendiculaire à Δ.

2) Soit $\mathcal{D} : 2x + 5y - 10 = 0$ et $\mathcal{D}' : (A, \vec{u})$ où $A(-1,2)$ et $\vec{u} = (3,2)$. Déterminer $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$.

3. Projection orthogonale du plan

a. Projeté orthogonal d'un point sur une droite

Soit un point M_0, $\mathcal{D}$ une droite et H le projeté orthogonal de M_0 sur $\mathcal{D}$

• Soit $\mathcal{D}$ d'équation $ax + by = c$.

alors H est tel que $M_0H = d(M_0, \mathcal{D}) \Leftrightarrow \begin{cases} H \in \mathcal{D} \\ \overrightarrow{M_0H} = t\overrightarrow{n} \end{cases}$ où $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

• Soit $\mathcal{D}$ passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.

alors H est tel que $\overrightarrow{AH} = \dfrac{\left\langle \overrightarrow{AM_0}, \overrightarrow{u} \right\rangle}{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle} \overrightarrow{u}$.

b. Distance d'un point à une droite

Soit un point $M_0(x_0, y_0)$

• Soit $\mathcal{D}$ d'équation $ax + by = c$ alors $d(M_0, \mathcal{D}) = \dfrac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

• Soit $\mathcal{D}$ représentée par $\begin{cases} x = a + tu_1 \\ y = b + tu_2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

alors $d(M_0, \mathcal{D}) = \inf\left\{ \left\| \overrightarrow{M_0M} \right\| \;\middle|\; M \in \mathcal{D} \right\}$ où $\|M_0M\|^2 = (a + tu_1 - x_0)^2 + (b + tu_2 - y_0)^2$

Exercice 9 Soit A, B et C trois points non alignés du plan.

Démontrer que pour tout M du plan on a $\left\langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{BC} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{CA} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{AB} \right\rangle = 0$

Soit H le point d'intersection des hauteurs issues de B et de C. Montrer que $\left\langle \overrightarrow{HA}, \overrightarrow{BC} \right\rangle = 0$.

En déduire que les trois hauteurs du triangle ABC sont concourantes.

4. Cercles dans le plan

a. Équation d'un cercle

• Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega(a, b)$ de rayon R alors $M(x, y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow$
$\Omega M = R \Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

• Soit $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$ alors $M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow$
$\left\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM} \right\rangle = 0 \Leftrightarrow (x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$

b. Représentation paramétrique d'un cercle

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega(a, b)$ de rayon R alors $M(x, y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \left(\dfrac{x - a}{R}\right)^2 + \left(\dfrac{y - b}{R}\right)^2 = 1$

Une représentation paramétrique de $\mathcal{C}$ est alors $\begin{cases} x = a + R\cos t \\ y = b + R\sin t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}$.

c. Éléments caractéristiques d'un cercle

Soit $\mathcal{E} = \{M(x, y) \mid x^2 + y^2 + ax + by + c = 0\}$.

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \Leftrightarrow \left(x + \dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \dfrac{b}{2}\right)^2 = d$ où $d = \dfrac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$

Si $d < 0$ alors $\mathcal{E} = \emptyset$

Si $d = 0$ alors $\mathcal{E} = \left\{ \Omega\left(-\dfrac{a}{2}, -\dfrac{b}{2}\right) \right\}$

Si $d > 0$ alors $\mathcal{E}$ est le cercle de centre $\Omega\left(-\dfrac{a}{2}, -\dfrac{b}{2}\right)$ et de rayon $R = \sqrt{d}$

Exercice 10 Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ où $A(3,1)$ et $B(7,-1)$

Déterminer l'ensemble $E = \{M(x,y) \mid x^2 + y^2 - 6y - 8x + 10 = 0\}$

Déterminer $\mathcal{C} \cap E$

Exercice 11 Soit $\mathcal{D}$ d'équation $x + 3y - 4 = 0$

et $(\mathcal{C}_k)_{k\in\mathbb{R}}$ la famille de cercles d'équation $x^2 + y^2 - 6y + k = 0$.

Déterminer l'intersection $\mathcal{D}$ et des cercles $\mathcal{C}_k$ en discutant suivant les valeurs du réel k.

IV Éléments de géométrie affine dans l'espace

1. Vecteurs de l'espace

a. Colinéarité

• Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

• $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid \vec{v} = \lambda\vec{u}$

• $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0$

b. Orthogonalité

$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0$

c. Coplanarité

$\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires $\Leftrightarrow$ $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est liée $\Leftrightarrow$ $rg(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) < 3$

d. Norme d'un vecteur

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$. La norme de $\vec{u}$ est $\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

e. Distance entre deux points

Soit $A(a_1, a_2, a_3)$ et $B(b_1, b_2, b_3)$ deux points.

La distance entre A et B est $d = AB = \left\| \overrightarrow{AB} \right\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$

2. Plans dans l'espace

a. Représentation d'un plan défini par un point et un vecteur normal

Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par un point $A(a, b, c)$ et de vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$.

$\mathcal{P}$ est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $\left\langle \vec{n}, \overrightarrow{AM} \right\rangle = 0$.

Une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est : $n_1x + n_2y + n_3z = n_1a + n_2b + n_3c$

b. Représentation d'un plan défini par un point et deux vecteurs

Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par un point $A(a,b,c)$ et de base $\left(\vec{u}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}, \vec{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}\right)$

$\mathcal{P}$ est l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AM}$ soient coplanaires $\Leftrightarrow rg(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AM}) < 3$.

• Représentation paramétrique de $\mathcal{P}$:

$$M(x,y,z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = b + \lambda u_2 + \mu v_2 \quad (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \\ z = c + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}$$

• Équation cartésienne de $\mathcal{P}$: soit $\vec{n}$ un vecteur orthogonal à la fois à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ alors $\vec{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

$M(x,y,z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \left\langle \vec{n},\overrightarrow{AM} \right\rangle = 0$

c. Représentation d'un plan défini par trois points

Soit $\mathcal{P} = (ABC)$ où A,B,C sont non alignés alors $\mathcal{P}$ est défini par A et la base $\left(\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{AC}\right)$

d. Éléments caractéristiques d'un plan

• Soit un plan $\mathcal{P}$: $\begin{cases} x = a + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = b + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = c + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$

$\mathcal{P}$ passe par $A(a,b,c)$ et admet pour base $\left(\vec{u}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}, \vec{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}\right)$

• Soit un plan $\mathcal{P}$: $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$

$\mathcal{P}$ passe par n'importe quel point $A(a,b,c)$ tel que $\alpha a + \beta b + \gamma c = \delta$

$\mathcal{P}$ admet pour base $\left(\vec{u}=\begin{pmatrix}\beta\\-\alpha\\0\end{pmatrix}, \vec{v}=\begin{pmatrix}\gamma\\0\\-\alpha\end{pmatrix}\right)$ (par exemple)

$\mathcal{P}$ admet pour vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$

e. Intersection de deux plans

• Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans de vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ respectivement

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants $\Leftrightarrow$ $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont non colinéaires

• Soit $\mathcal{P}$: $ax + by + cz = d$ et $\mathcal{P}'$: $a'x + b'y + c'z = d'$

Soit le système (S) $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$.

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants $\Leftrightarrow$ $rg(S) = 2$: (S) est un système d'équations de la droite $\mathcal{D} = \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$

• Soit $\mathcal{P} : ax+by+cz=d$

et $\mathcal{P}'$: $\begin{cases} x = x_0+\lambda u_1+\mu v_1 \\ y = y_0+\lambda u_2+\mu v_2 \\ z = z_0+\lambda u_3+\mu v_3 \end{cases}$ $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

On résout l'équation d'inconnues λ et μ :
$a(x_0+\lambda u_1+\mu v_1)+b(y_0+\lambda u_2+\mu v_2)+c(z_0+\lambda u_3+\mu v_3)=d.$

Exercice 12 Soit $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ un repère orthonormé de l'espace.

Soit A,B et C les points définis par $\overrightarrow{OA}=\vec{i}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{j}$ et $\overrightarrow{OC}=\vec{k}$ et A',B' et C' les points définis par $\overrightarrow{AA'}=a\vec{u}$, $\overrightarrow{BB'}=b\vec{u}$ et $\overrightarrow{CC'}=c\vec{u}$ où $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ et $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$.
Montrer que les points $A,\ B,\ C'$ ne sont pas alignés puis déterminer une équation cartésienne du plan (ABC'). Faire de même avec (BCA') et (CAB').
Donner une condition nécessaire et suffisante pour que ces trois plans soient deux à deux parallèles. Dans ce cas, que peut-on dire ?

3. Projection orthogonale de l'espace

a. Projeté orthogonal sur un plan

Soit M_0 un point, $\mathcal{P}$ un plan et H le projeté orthogonal de M_0 sur $\mathcal{P}$.

• Soit $\mathcal{P} : ax+by+cz=d$ de vecteur normal $\vec{n}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

H est défini par $M_0H=d(M_0,\mathcal{P}) \Leftrightarrow \begin{cases} H\in\mathcal{P} \\ \overrightarrow{M_0H} \text{ et } \vec{n} \text{ sont colinéaires} \end{cases}$

• Soit $\mathcal{P}(A;\vec{u},\vec{v})$ où $(\vec{u},\vec{v})$ est une base orthonogonale du plan $\mathcal{P}$.

H est défini par $\overrightarrow{AH}=\dfrac{\left\langle\overrightarrow{AM_0},\vec{u}\right\rangle}{\langle\vec{u},\vec{u}\rangle}\vec{u}+\dfrac{\left\langle\overrightarrow{AM_0},\vec{v}\right\rangle}{\langle\vec{v},\vec{v}\rangle}\vec{v}$.

b. Distance d'un point à un plan

Soit un point $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

• Soit $\mathcal{P} : ax+by+cz=d$ alors $d(M_0,\mathcal{P})=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

• Soit $\mathcal{P}$: $\begin{cases} x = a+\lambda u_1+\mu v_1 \\ y = b+\lambda u_2+\mu v_2 \\ z = c+\lambda u_3+\mu v_3 \end{cases}$ alors $d(M_0,\mathcal{P})=\inf\{\|M_0M\| \mid M\in\mathcal{P}\}$

où $\|M_0M\|^2=(a+\lambda u_1+\mu v_1-x_0)^2+(b+\lambda u_2+\mu v_2-y_0)^2+(c+\lambda u_3+\mu v_3-z_0)^2$

Exercice 13 Soit E l'espace affine muni d'un repère orthonormal $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On considère les points A,B et C de E définis par $\overrightarrow{OA}=\vec{i}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{j}$ et $\overrightarrow{OC}=\vec{k}$.
Soit $\mathcal{P}$ le plan de E contenant les points A,B et C et soit M un point de E de coordonnées (x_0,y_0,z_0).
Déterminer une équation de $\mathcal{P}$. Quelle est la distance de M à $\mathcal{P}$?
Déterminer les coordonnées d'un point I intérieur à (O,A,B,C) et équidistants des quatre plans $\mathcal{P}$, (xOy), (xOz) et (yOz). Donner les coordonnées des projetés orthogonaux de I sur chacun de ces plans.

4. Sphères dans l'espace

a. Équations d'une sphère

• Soit $\mathcal{S}$ la sphère de centre $\Omega(a,b,c)$ et de rayon R.

$M(x,y,z) \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \Omega M = R \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$

• Soit $\mathcal{S}$ la sphère de diamètre $[AB]$.

$M(x,y,z) \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \left\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM} \right\rangle = 0 \Leftrightarrow (x-x_A)(x-x_B) + (y-y_A)(y-y_B) + (z-z_A)(z-z_B) = 0.$

b. Éléments caractéristiques d'une sphère

Soit $\mathcal{E} = \{M(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2+ax+by+cy+d = 0\}$.

On écrit les formes canoniques en x, en y et en z :

$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d = 0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{b}{2}\right)^2 + \left(z+\frac{c}{2}\right)^2 = e$

où $e = \dfrac{a^2+b^2+c^2-4d}{4}$

Si $e < 0$ alors $\mathcal{E} = \emptyset$

Si $e = 0$ alors $\mathcal{E} = \left\{\Omega\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right)\right\}$

Si $e > 0$ alors $\mathcal{E}$ est la sphère de centre $\Omega\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}; -\frac{c}{2}\right)$ et de rayon $R = \sqrt{e}$

Exercice 14 On donne quatre points de l'espace rapporté à un repère orthonormé :
$A(0,0,0)$, $B(0,1,2)$, $C(0,2,1)$ et $D(2,2,2)$.
Vérifier que les points A, B, C, D ne sont pas coplanaires et déterminer l'équation cartésienne de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$.