Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$

Ce qu'il faut connaître :

-le calcul du produit scalaire de deux vecteurs et de la norme d'un vecteur de $\mathbb{R}^n$
-la définition de l'orthogonalité de deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$
-l'inégalité de Cauchy-Schwarz
-l'inégalité triangulaire
-le théorème de Pythagore
-la définition d'une base orthogonale
-la définition d'une base orthonormale
-la définition de l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$
-la définition de la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$
-les propriétés de la projection orthogonale sur F ($p \circ p = p$, $\mathrm{Im}\, p = F$, $\ker p = F^{\perp}$)
-l'expression de la projection orthogonale sur F dans une base orthonormale de F
-la définition de la distance entre deux vecteurs
-la définition de la distance entre un vecteur et un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$

1. **Comment calculer le produit scalaire de deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$**
   Si $u = (x_1, \cdots, x_n)$, $X = {}^t(x_1, \cdots, x_n)$ et $v = (y_1, \cdots, y_n)$, $Y = {}^t(y_1, \cdots, y_n)$ alors $\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = {}^tXY$
2. **Comment étudier l'orthogonalité de deux vecturs u et v de $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$**
   On calcule $\langle u, v\rangle$ et $u \perp v \Leftrightarrow \langle u, v\rangle = 0$

3. **Comment calculer la norme d'un vecteur de $\mathbb{R}^n$**
   $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$ et si $u = (x_1, \cdots, x_n)$, $X = {}^t(x_1, \cdots, x_n)$ alors $\|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{{}^tXX}$

4. **Comment vérifier qu'une base $\mathcal{B} = (\mathbf{u_1}, \cdots, \mathbf{u_n})$ est orthogonale**
   On vérifie que $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2 \mid i \neq j, \langle u_i, u_j\rangle = 0$

5. **Comment vérifier qu'une base $\mathcal{B} = (\mathbf{u_1}, \cdots, \mathbf{u_n})$ est orthonormale**
   a. On vérifie que $\forall i \in [\![1, n]\!], \|u_i\| = 1$ et $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2 \mid i \neq j, \langle u_i, u_j\rangle = 0$
   b. Si P est la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$ alors $\mathcal{B}$ est orthonormale $\Leftrightarrow {}^tPP = I_n$

6. **Comment déterminer le projeté orthogonal d'un vecteur u de $\mathbb{R}^n$ sur un sous-espace F**
   a. on cherche deux vecteurs $u_F \in F$ et $u_{F^{\perp}} \in F^{\perp}$ tels que $u = u_F + u_{F^{\perp}}$, alors $p(u) = u_F$
   b. si on a une base orthogonale $(u_1, \cdots, u_p)$ de F, on calcule $p(u) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\langle u, u_i\rangle}{\langle u_i, u_i\rangle} u_i$

7. **Comment calculer la distance d'un vecteur u de $\mathbb{R}^n$ à un sous-espace F**
   a. on détermine la borne inférieure de $\{\|u - v\| \mid v \in F\}$
   b. si on a une base orthogonale de F, on calcule $p(u)$ puis $\|u - p(u)\|$