TD 15 : Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$

1 Exercice d'application du cours

1 Dans chacun des cas suivants, calculer la projection orthogonale du vecteur u sur le sous-espace vectoriel F donné, donner la matrice du projecteur orthogonal sur F, et enfin calculer la distance du vecteur u au sous-espace vectoriel F :

1. $u = (1, 2)$, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad 3x + 2y = 0\}$.
2. $u = (-1, 1, 2)$ $F = \mathrm{Vect}\,((3, 0, 4))$.
3. $u = (-1, 1, 2)$, $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} 3x + 2y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}\right\}$.
4. $u = (1, -1, 1)$, $F = \mathrm{Vect}\,((1, 1, 1), (2, 2, 2))$.
5. $u = (1, -1, 1)$, $F = \mathrm{Vect}\,((1, 1, 1), (2, -2, 0))$.
6. $u = (1, -1, 1, 1)$, $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad 3x + 2y + z + t = 0\}$.
7. $u = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ $F = \mathrm{Vect}\,((1, \dots, 1))$.

2 Exercices classiques

2 On considère la matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Sans calculs, justifier que A est diagonalisable.
2. Calculer les valeurs propres de A et donner les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.
3. Donner des bases orthonormales des sous-espaces propres de A.
4. En déduire une matrice P inversible diagonalisant A.
5. Calculer P^{-1}.
6. On considère la matrice B suivante :
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Exprimer B à l'aide de A et I_3. En déduire que B est diagonalisable.

3 Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et u, v deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$. On définit une application f sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad f(x) = \langle u, x\rangle v.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.
2. (a) Montrer que f est de rang 1.
   (b) En déduire la dimension de Ker .
   (c) Interpréter géométriquement $\mathrm{Ker}\, f$.
3. (a) Montrer que tout vecteur propre de f qui n'est pas associé à la valeur propre 0 est dans $\mathrm{Im}\, f$.
   (b) Calculer $g = f \circ f$.
   (c) Montrer que g est nul si et seulement si $v \in \mathrm{Ker}\, f$.
   (d) En déduire que f est diagonalisable si et seulement si v et u ne sont pas orthogonaux.
4. En notant U, V respectivement les matrices de u et v sur la base canonique, écrire la matrice A de f en fonction de U et V.
5. Calculer A^2 et retrouver le résultat de la question **3.c)**

3 Autre exercice

4 Le but de cet exercice est de prouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
Soit x et y deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz si x ou y est nul.
2. (a) Montrer que l'inégalité de Cauchy-Schwarz est vraie pour les vecteurs x et y si et seulement si elle l'est pour les vecteurs $-x$ et y.
   (b) En déduire que l'on peut supposer que $\langle x, y\rangle \geqslant 0$.
3. On suppose que x et y sont non nuls et tels que $\langle x, y\rangle \geqslant 0$. On pose :
$$x' = \|x\|y \quad \text{et} \quad y' = \|y\|x.$$
   (a) Calculer les normes des vecteurs x' et y'.
   (b) Tracer les vecteurs x' et y' sur une figure.
   (c) On pose $\delta = \|x' - y'\|$. Indiquer δ sur la figure.
   (d) Développer δ^2, et en déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz.