

Semaine 19  
du lundi 11 au vendredi 15 mars 2024

## Produit scalaire et projection orthogonale

Vecteurs de  $\mathbb{R}^n$

Colinéarité

Déterminant de deux vecteurs dans le plan, condition de colinéarité

Produit scalaire usuel dans  $\mathbb{R}^n$

Écriture matricielle du produit scalaire

Bilinéarité

Norme euclidienne

Inégalité de Cauchy-Schwartz

Inégalité triangulaire

Vecteurs orthogonaux

Toute famille de vecteurs deux à deux orthogonaux est libre

Théorème de Pythagore

Base orthonormale de  $\mathbb{R}^n$  ou d'un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$

Toute matrice carrée symétrique est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres et, pour une telle base, la matrice de passage vérifie  $P^{-1} = {}^tP$

Distance entre deux vecteurs (ou points)

Définition de la distance d'un vecteur (ou point) à une partie non vide

Orthogonal  $F^\perp$  d'un sous-espace vectoriel  $F$  de  $\mathbb{R}^n$

$\dim F + \dim F^\perp = n$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\exists!(x_F, x_{F^\perp}) \in F \times F^\perp \mid x = x_F + x_{F^\perp}$

Projection orthogonale  $p$  sur un sous-espace vectoriel  $F$ ,  $p : x \mapsto x_F$

Écriture de la projection orthogonale  $p$  dans une base orthogonale ou orthonormale de  $F$

Relation  $p \circ p = p$

$\text{Im } p = F$  et  $\text{ker } p = F^\perp$

Distance d'un vecteur (ou point) à un sous-espace de  $\mathbb{R}^n$

## Couples de variables aléatoires réelle discrètes

Couple  $(X, Y)$  de variables aléatoires réelle discrètes

L'événement  $[X = x] \cap [Y = y]$  est noté  $[X = x, Y = y]$

Loi conjointe

Lois marginales

Lois conditionnelles

Théorème de transfert : espérance de  $u(X, Y)$  où  $X$  et  $Y$  sont finies et  $u$  est une fonction positive

Covariance

Espérance et Variance de  $X + Y$

Deux variables  $X$  et  $Y$  sont indépendantes si, et seulement si, pour tout  $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ ,  $P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$ .

Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables indépendantes alors

$u(X)$  et  $v(Y)$  sont indépendantes

$E(XY) = E(X)E(Y)$

$\text{Cov}(X, Y) = 0$

$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

Sur des exemples simples, recherche de la loi de  $u(X, Y)$ , le couple  $(X, Y)$  ayant une loi conjointe connue

Cas particulier de la somme de deux variables discrètes à valeurs dans  $\mathbb{N}$

Loi de la somme de deux variables indépendantes suivant des lois binomiales de même paramètre  $p$

Loi de la somme de deux variables indépendantes suivant des lois de Poisson

Généralisation au cas de  $n$  variables indépendantes

### Questions de cours

Donner la définition du produit scalaire de deux vecteurs  $(x_1, \dots, x_n)$  et  $(y_1, \dots, y_n)$  de  $\mathbb{R}^n$

Définition de l'orthogonalité de deux vecteurs de  $\mathbb{R}^n$

Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz

Inégalité triangulaire

Énoncer le théorème de Pythagore dans  $\mathbb{R}^n$

Définition d'une base orthonormale de  $\mathbb{R}^n$

Expression de la projection orthogonale sur  $F$  dans une base orthonormale de  $F$

Définition de la distance d'un vecteur (ou point) à un sous-espace vectoriel

Lien entre distance et projection orthogonale

Définition de la loi conjointe de deux variables aléatoires réelles discrètes

Comment déterminer les lois marginales d'un couple  $(X, Y)$  de variables aléatoires réelles discrètes si on connaît la loi conjointe ?

Définition de la loi de  $X$  conditionnée par un événement  $[Y = n]$

Définition de la loi de  $X$  sachant  $Y$

Indépendance de deux variables aléatoires réelles discrètes

Théorème de transfert pour un couple de variables aléatoires discrètes finies

Stabilité de la loi binomiale

Stabilité de la loi de Poisson

Covariance d'un couple de variables aléatoires réelles discrètes

Lien(s) entre l'indépendance de deux variables aléatoires discrètes et leur covariance

Variance d'une somme de variables aléatoires réelles discrètes

Lien entre indépendance et non corrélation de variables aléatoires réelles discrètes