Couples de variables aléatoires réelles discrètes

I Somme d'une série double

Soit (u_{ij}) une suite double de nombres réels.
On sait déjà calculer des sommes de la forme $S = \sum_{(i,j)\in I\times J} u_{ij}$ dans le cas où $I \times J$ est fini.

Par exemple $\sum_{(i,j)\in[0,n]\times[0,m]} u_{ij} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} u_{ij} = \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} u_{ij}$

On voudrait pouvoir faire la même chose avec des sommes infinies $\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} u_{ij} = \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} u_{ij}$.

Pour cela, il est nécessaire que chaque terme ait un sens :
-$\forall i \in \mathbb{N},$ la série $\sum_{j\geqslant 0} u_{ij}$ est convergente de somme U_i et la série $\sum_{i\geqslant 0} U_i$ est convergente
-$\forall j \in \mathbb{N},$ la série $\sum_{i\geqslant 0} u_{ij}$ est convergente de somme V_j et la série $\sum_{j\geqslant 0} V_j$ est convergente

On admet la proposition suivante :

Théorème de Fubini Soit (u_{ij}) une suite double de nombres réels. On suppose que :
-pour tout entier naturel $i,$ la série $\sum_{j} u_{ij}$ est absolument convergente

Soit S_i sa somme : $S_i = \sum_{j=0}^{+\infty} u_{ij}$

-la série $\sum_{i}\sum_{j=0}^{+\infty} |u_{ij}|$ est convergente

Alors la série $\sum_{i}\sum_{j=0}^{+\infty} u_{ij}$ est convergente et $\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} u_{ij} = \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} u_{ij}$.

On note alors cette somme $\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} u_{ij}$.

II Lois associées à un couple de variables aléatoires réelles discrètes

Dans tout ce chapitre, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

1. Généralités

Définition 1 On appelle couple de variables aléatoires, et on note $Z = (X, Y),$ toute application

$Z : \begin{cases} \Omega & \to & \mathbb{R}^2 \\ \omega & \mapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{cases}$ où X et Y sont deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

Notation •Pour tous sous-ensembles A et B de $\mathbb{R},$ on note $[X \in A, Y \in B]$ l'événement
$[X \in A] \cap [Y \in B] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A \text{ et } Y(\omega) \in B\}$
•Pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2,$ on note $[X = x, Y = y]$ l'événement
$[X = x] \cap [Y = y] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x \text{ et } Y(\omega) = y\}$.

Exemple On lance une infinité de fois une pièce de monnaie.
On note X et Y les rangs d'apparition du premier et du second "Pile" rexpectivement.
Alors (X, Y) est un couple de variables aléatoires discrètes.

L'événement $(X < 10, Y > 20)$ est "le premier pile est apparu avant le 10^e lancer et le second pile après le 20^e lancer".

Proposition 1 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes tel que
$X(\Omega) \times Y(\Omega) = \{(x_i, y_j) \mid (i,j) \in I \times J\}$ où I et J sont des parties de $\mathbb{N}$.
$([X = x_i, Y = y_j])_{(i,j)\in I\times J}$ est un système complet d'événements associé au couple (X, Y).

2. Loi conjointe

Proposition 2 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes.
On appelle loi du couple (X, Y) ou loi conjointe des variables X et Y
l'application $\left\{\begin{array}{ccc} X(\Omega) \times Y(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & P(X = x, Y = y) \end{array}\right.$.
On note parfois $\mathcal{L}_{(X,Y)}$ cette application.

Proposition 3 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes d'univers image
$X(\Omega) \times Y(\Omega) = \{(x_i, y_j) \mid (i,j) \in I \times J\}$ où I et J sont des parties de $\mathbb{N}$.
•Si X et Y sont finies, $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \cdots, y_m\}$ alors $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P(X = x_i, Y = y_j) = 1$
•Si X et Y sont infinies, $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ alors
$\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} P(X = x_i, Y = y_j) = 1$.

Exercice 1 On lance une infinité de fois une pièce de monnaie.
À chaque lancer, la probabilité d'obtenir Pile est p, $p \in]0, 1[$.
X et Y sont les rangs d'apparition du premier et du second "Pile" rexpectivement.
Déterminer la loi du couple (X, Y).

3. Lois marginales

Définition 2 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes.
La loi de X est appelée première loi marginale et la loi de Y est appelée
deuxième loi marginale du couple (X, Y).

Proposition 4 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes tel que
$X(\Omega) \times Y(\Omega) = \{(x_i, y_j) \mid (i,j) \in I \times J\}$ où I et J sont des parties de $\mathbb{N}$.
Les lois marginales sont données par :
$\forall i \in I,\ P(X = x_i) = \sum_{j\in J} P(X = x_i, Y = y_j)$ et $\forall j \in J,\ P(Y = y_j) = \sum_{i\in I} P(X = x_i, Y = y_j)$

Exercice 2 On reprend l'exercice 1. Déterminer les lois marginales de X et de Y.

4. Lois conditionnelles

Définition 3 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes tel que
$X(\Omega) \times Y(\Omega) = \{(x_i, y_j) \mid (i,j) \in I \times J\}$ où I et J sont des parties de $\mathbb{N}$.
Si $\forall j \in J,\ P(Y = y_j) \neq 0$ alors la loi de X conditionnée par l'événement $[Y = y_j]$ est l'application

$$\left\{\begin{array}{ccc} X(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ x_i & \mapsto & P_{[Y=y_j]}(X = x_i) = \dfrac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} \end{array}\right.$$

On appelle loi de X sachant Y l'ensemble des couples $\Big((x_i, y_j), P_{[Y=y_j]}(X = x_i)\Big)_{(i,j)\in I\times J}$.

Exercice 3 Soit $\lambda > 0$ et $p \in]0,1[$, X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que Y suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, la loi de X sachant $Y = n$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.
Déterminer la loi conjointe de X et Y.
Déterminer la loi de X.

III Indépendances de variables aléatoires réelles discrètes

1. Indépendance de deux variables aléatoires réelles discrètes

Définition 4 Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes.
X et Y sont indépendantes pour la probabilité P si, et seulement si :
$\forall (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega),\ P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y).$

Proposition 5 Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes.
Si X et Y sont indépendantes pour la probabilité P alors
pour toutes parties A et B de $\mathbb{R}$, $P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$.

Exercice 4 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes les deux la même loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{2}$.
Soit $m \in \mathbb{N}^*$.
Déterminer la probabilité des événements $[X = Y]$ et $[X \geqslant mY]$.

2. Indépendance de plusieurs variables aléatoires réelles discrètes

Définition 5 •Soit $X_1, \cdots X_n$ n variables aléatoires réelles discrètes.
-$X_1, \cdots X_n$ sont deux à deux indépendantes pour la probabilité P
si, et seulement si : $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2 \ |\ i \neq j$, X_i et X_j sont indépendantes.

-$X_1, \cdots, X_n$ sont (mutuellement) indépendantes pour la probabilité P
si, et seulement si : $\forall (x_1, \cdots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega),\ P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i = x_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i).$

•Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de vatriables aléatoires réelles discrètes.
Les variables $X_n,\ n \in \mathbb{N}$ sont mutuellement indépendantes pour la probabilité P
si, et seulement si, pour toute partie finie I de $\mathbb{N}$, les variables $(X_i)_{i \in I}$ sont mutuellement indépendantes.

Conséquence Si $X_1, \cdots, X_n$ sont (mutuellement) indépendantes pour la probabilité P alors
•$X_1, \cdots X_n$ sont deux à deux indépendantes pour la probabilité P
•toute sous-famille est formée de variables aléatoires mutuellement indépendantes.
•pour toutes parties $A_1, \cdots, A_n$ de $\mathbb{R}$, $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \in A_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in A_i).$

Exercice 5 Soit n et k deux entiers naturels non nuls.
Dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n on en tire k une à une, avec remise.
On désigne par X_k la variable aléatoire égale au plus grand des numéros obtenus.
Déterminer la loi des variables aléatoires X_k.

IV Variable aléatoire fonction de variables aléatoires réelles discrètes

1. Loi d'une variable aléatoire fonction de deux variables aléatoires réelles discrètes

Proposition 6 Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes.
Soit f une application définie de $X(\Omega)\times Y(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$.
On pose $Z=f(X,Y)$ la variable aléatoire définie par : $\forall\omega\in\Omega,\ Z(\omega)=f(X(\omega),Y(\omega))$.
Alors la loi de probabilité de $Z=f(X,Y)$ est donnée par :
$\forall z\in Z(\Omega),\ P(Z=z)=\displaystyle\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)\,|\,f(x,y)=z} P(X=x,Y=y)$.
En particulier, si X et Y sont indépendantes, on obtient :
$\forall z\in Z(\Omega),\ P(Z=z)=\displaystyle\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)\,|\,f(x,y)=z} P(X=x)P(Y=y)$

Conséquence si X et Y sont indépendantes alors :
$\forall z\in (X+Y)(\Omega),\ P(X+Y=z)=\displaystyle\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)\,|\,x+y=z} P(X=x)P(Y=y)$.

Exercice 6 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre $p\in]0,1[$. Déterminer les lois de $S=X+Y$ et $D=X-Y$.

2. Stabilité de la loi binomiale et de la loi de Poisson

Proposition 7 Soit n et m deux entiers naturels et $p\in]0,1[$.
Soit X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes indépendantes telles que :
$X\hookrightarrow\mathcal{B}(n,p)$ et $Y\hookrightarrow\mathcal{B}(m,p)$ alors $X+Y\hookrightarrow\mathcal{B}(n+m,p)$

Plus généralement :
Soit $n_1,\cdots,n_k$ k entiers naturels et $p\in]0,1[$.
Soit $X_1,\cdots,X_k$ k variables aléatoires réelles discrètes indépendantes telles que :
$\forall i\in[\![1,k]\!],\ X_i\hookrightarrow\mathcal{B}(n_i,p)$ alors $X_1+\cdots+X_k\hookrightarrow\mathcal{B}(\sum\limits_{i=1}^{k}n_i,p)$

Remarque En particulier :
soit $X_1,\cdots,X_n$ n variables aléatoires réelles discrètes indépendantes toutes de même loi de Bernoulli de paramètre p
alors $\forall i\in[\![1,n]\!],\ X_i\hookrightarrow\mathcal{B}(1,p)$ donc $X_1+\cdots+X_k\hookrightarrow\mathcal{B}(n,p)$.

Preuve Si $X\hookrightarrow\mathcal{B}(n,p)$ et $Y\hookrightarrow\mathcal{B}(m,p)$ alors $X(\Omega)=[\![0,n]\!]$ et $Y(\Omega)=[\![0,m]\!]$
donc $(X+Y)(\Omega)=[\![0,n+m]\!]$.
$\forall k\in[\![0,n+m]\!],\ P(X+Y=k)=\displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![0,n]\!]\times[\![0,m]\!]\,|\,i+j=k} P(X=i)P(Y=j)$

$$=\sum_{(i,j)\in[\![0,n]\!]\times[\![0,m]\!]\,|\,i+j=k}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}\binom{m}{j}p^j(1-p)^{m-j}$$
$$=\sum_{(i,j)\in[\![0,n]\!]\times[\![0,m]\!]\,|\,i+j=k}\binom{n}{i}\binom{m}{j}p^{i+j}(1-p)^{n+m-(i+j)}$$
$$=p^k(1-p)^{n+m-k}\sum_{(i,j)\in[\![0,n]\!]\times[\![0,m]\!]\,|\,i+j=k}\binom{n}{i}\binom{m}{j}=p^k(1-p)^{n+m-k}\binom{n+m}{k}.$$

Donc $X+Y\hookrightarrow\mathcal{B}(n+m,p)$

Pour k variables la démonstration se fait par récurrence.

Proposition 8 Soit λ et μ deux réels strictement positifs.
Soit X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes indépendantes telles que :
$X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ alors $X+Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

Plus généralement :
soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ k réels strictement positifs.
Soit $X_1, \cdots, X_k$ k variables aléatoires réelles discrètes indépendantes telles que :
$\forall i \in [\![1,k]\!]$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_i)$ alors $X_1+\cdots+X_k \hookrightarrow \mathcal{P}(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i)$.

Preuve Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ alors $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$ donc $(X+Y)(\Omega) = \mathbb{N}$.

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P(X+Y=k) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2\,|\,i+j=k} P(X=i)P(Y=j)$$
$$= \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2\,|\,i+j=k} \frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}\frac{\mu^j}{j!}e^{-\mu} = e^{-(\lambda+\mu)}\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2\,|\,i+j=k}\frac{\lambda^i\mu^j}{i!j!}$$
$$= e^{-(\lambda+\mu)}\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda^i\mu^{k-i}}{i!(k-i)!} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\lambda^i\mu^{k-i} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!}(\lambda+\mu)^k.$$

Donc $X+Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda+\mu)$.
Pour k variables la démonstration se fait par récurrence.

3. Théorème de transfert dans le cas de variables finies

Proposition 9 Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes finies tel que $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \cdots, y_m\}$
Soit f une application définie de $X(\Omega)\times Y(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ et $Z = f(X,Y)$.
Alors Z admet une espérance et $E(Z) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_i,y_j)P(X=x_i, Y=y_j)$.

Exercice 7 On lance deux dés classiques. Déterminer l'espérance de la somme des deux dés.

V Covariance et corrélation

1. Covariance

Définition 6 Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes.
On suppose que X et Y admettent toutes deux une espérance.
Si la variable aléatoire $(X-E(X))(Y-E(Y))$ admet une espérance alors on appelle covariance de X et Y le réel noté $Cov(X,Y)$ défini par : $Cov(X,Y) = E((X-E(X))(Y-E(Y)))$.

Proposition 10 Théorème de Koënig-Huygens
Si X, Y et XY admettent chacune une espérance alors (X,Y) admet une cavariance et $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

Remarque Si X et Y admettent un moment d'ordre 2 alors XY admet une espérance et donc (X,Y) admet une covariance. Cela provient du fait que $|x_iy_j| \leqslant \frac{1}{2}(x_i^2+y_j^2)$.

Exercice 8 On dispose sur un plateau trois cartes numérotées 1, 2 et 3. Alice choisit une carte au hasard et la retire du plateau. Bertille choisit au hasard une carte et la replace sur le plateau puis Cécile choisit au hasard une carte. On note A, B et C les variables aléatoires égales au numéro de la carte tirée par Alice, Bertille et Cécile respectivement.

Donner les lois de A, B et C puis les lois des couples (A,B), (A,C) et (B,C).
Calculer la covariance de B et C. Les variables B et C sont-elles indépendantes ?
Calculer la covariance du couple (A,B). Les variables A et B sont-elles indépendantes ?

Proposition 11 Soit X, Y et Z des variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :
•$Cov(X,X) = V(X)$
•$Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$ (la covariance est symétrique)
•$Cov(X+Y,Z) = Cov(X,Z) + Cov(Y,Z)$ et $Cov(\lambda X,Y) = \lambda Cov(X,Y)$ (la covairance est bilinéaire)

Preuve À faire en exercice

Proposition 12 Soit X et Y des variables aléatoires discrètes admettant chacune un moment d'ordre 2.
Alors $X+Y$ admet une variance et $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X,Y)$.

Preuve Par définition, $V(X+Y) = E\Big((X+Y-E(X+Y))^2\Big) = E\Big((X-E(X)+Y-E(Y))^2\Big)$ car $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

$$= E\Big((X-E(X))^2 + (Y-E(Y))^2 + 2(X-E(X))(Y-E(Y))\Big)$$
$$= E\Big((X-E(X))^2\Big) + E\Big((Y-E(Y))^2\Big) + 2E((X-E(X))(Y-E(Y)))$$

2. Corrélation

Définition 7 Soit X et Y des variables aléatoires discrètes admettant chacune un moment d'ordre 2.
On dit que X et Y sont corrélées si, et seulement si, $Cov(X,Y) \neq 0$.

Exercice 9 On reprend l'exercice 8. Les variables A et B (resp. B et C) sont-elles corrélées ?

Proposition 13 Soit X et Y des variables aléatoires discrètes admettant chacune un moment d'ordre 2.
Si X et Y sont indépendantes pour la probabilité P alors
•$E(XY) = E(X)E(Y)$
•$Cov(X,Y) = 0$ (donc X et Y sont non corrélées)
•$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

Preuve Sous réserve d'existence,
$$E(XY) = \sum_{(i,j)\in I\times J} x_i y_j P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{(i,j)\in I\times J} x_i y_j P(X = x_i)P(Y = y_j)$$
$$= \left(\sum_{i\in I} x_i P(X = x_i)\right)\left(\sum_{j\in J} y_j P(Y = y_j)\right) = E(X)E(Y).$$
Le reste est évident.

Proposition 14 Soit $X_1, \cdots, X_n$ n variables aléatoires réelles discrètes admettant chacune un moment d'ordre 2.
Si $X_1, \cdots, X_n$ sont deux à deux indépendantes alors $E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$ et $V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$.

Exercice 10 Soit $X_1, \cdots, X_n$ n variables aléatoires mutuellement indépendantes toutes de loi de Bernoulli de même paramètre p. On pose : $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $Y_i = X_i X_{i+1}$ et $S_n = \sum_{i=1}^{n-1} Y_i$.
Déterminer la loi de Y_i puis calcuer l'espérance de S_n.
On admettant la généralisation de la proposition 12, on admet que
$V\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(Y_i) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} cov(Y_i, Y_j)$. Calculer la variance de S_n.