Corrigé DM9

1. **a.** Comme $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$, $Z(\Omega) = \mathbb{R}_-$. Soit $x \in \mathbb{R}_-$.

$P(Z \leqslant x) = P(-\mu X \leqslant x) = P\left(X \geqslant -\frac{x}{\mu}\right)$ car $-\mu < 0$

donc $P(Z \leqslant x) = 1 - F_X\left(-\frac{x}{\mu}\right)$ où F_X est la fonction de répartition de X.

Comme $\forall u \in \mathbb{R},\ F_X(u) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda u} & \text{si } u \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } u < 0 \end{cases}$, on pose $F_Z(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ e^{\frac{\lambda}{\mu}x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

Comme $\lim\limits_{x \to 0^+} F_Z(x) = 1 = F_Z(0)$, F_Z est continue en 0, étant continue par ailleurs, F_Z est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, F_Z est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0.

On en conclut que F_Z est la fonction de répartition d'une variable à densité et que :

$$\boxed{\text{une densité de } Z = -\mu X \text{ est définie par : } \forall x \in \mathbb{R}, f_Z(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\mu} e^{\frac{\lambda}{\mu}x} & \text{si } x \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}}.$$

b. Comme X et Y sont indépendantes, Y et $Z = -\mu X$ sont indépendantes.

D'après le rappel de l'énoncé, $R_\mu = Y + Z$ est une variable à densité dont une densité est définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_\mu(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(t) f_Z(x-t)\,\mathrm{d}t$.

Or $f_Y(t) f_Z(x-t) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geqslant 0 \\ x - t \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geqslant 0 \\ x \leqslant t \end{cases} \Leftrightarrow t \geqslant \max(0, x)$.

Si $x \geqslant 0$ alors $\max(0,x) = x$.

On a alors $f_\mu(x) = \int_x^{+\infty} f_Y(t) f_Z(x-t)\,\mathrm{d}t = \displaystyle\int_x^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{\lambda}{\mu} e^{\frac{\lambda}{\mu}(x-t)}\,\mathrm{d}t$

$$= \lambda e^{\frac{\lambda}{\mu}x} \int_x^{+\infty} \frac{\lambda}{\mu} e^{-\frac{\lambda(\mu+1)}{\mu}t}\,\mathrm{d}t = \frac{\lambda}{\mu+1} e^{\frac{\lambda}{\mu}x} \left[-e^{-\frac{\lambda(\mu+1)}{\mu}t} \right]_x^{+\infty} = \frac{\lambda}{\mu+1} e^{-\lambda x}.$$

Si $x < 0$ alors $\max(0,x) = 0$.

On a alors $f_\mu(x) = \int_0^{+\infty} f_Y(t) f_Z(x-t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{\lambda}{\mu+1} e^{\frac{\lambda}{\mu}x} \left[-e^{-\frac{\lambda(\mu+1)}{\mu}t} \right]_0^{+\infty} = \dfrac{\lambda}{\mu+1} e^{\frac{\lambda}{\mu}x}$.

On conclut que $\boxed{\text{une densité de } R_\mu \text{ est définie par : } \forall x \in \mathbb{R},\ f_\mu(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\mu+1} e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ \dfrac{\lambda}{\mu+1} e^{\frac{\lambda}{\mu}x} & \text{si } x < 0 \end{cases}}$.

2. On calcule le discriminant $\Delta = a^2 - 4b$. Si $\Delta \geqslant 0$ alors la plus grande des deux racines réelles (éventuellement confondues) est $\dfrac{-a + \sqrt{\Delta}}{2}$:

```
import math as m
def MaxRacine(a,b):
    delta = a**2-4*b
    if delta >= 0:
        return (-a + m.sqrt(delta))/2
    return []
```

3. **a.** Le discriminant du trinôme $Q(t) = t^2 + Xt - Y$ est $\Delta = X^2 + 4Y$.

Comme X et Y sont des variables à valeurs positives ou nulles, $\Delta \geqslant 0$ presque sûrement.

Donc Q admet deux racines réelles distinctes si, et seulement si, $\Delta \neq 0$.

Or $\Delta = 0 \Leftrightarrow X = Y = 0$.

Comme X et Y sont des variables indépendantes, $P([X = 0] \cap [Y = 0]) = P(X = 0)P(Y = 0)$, et comme X et Y sont des variables à densité, $P(X = 0) = P(Y = 0) = 0$.

On en conclut que $P(\Delta > 0) = 1$ et que

$\boxed{Q \text{ admet presque sûrement deux racines réelles distinctes}}$.

En notant S la plus petite et T la plus grande de ces racines, on sait que $ST = -Y$.

Comme $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$, $P(Y > 0) = 1$ et donc $P(ST < 0) = 1$.

Ainsi S et T sont de signes opposés et $\boxed{S < 0 < T \text{ presque sûrement}}$.

b. On utilise le rappel pour simuler X et Y puis la fonction de la question **2.** pour renvoyer une réalisation de T :

```
import random as rd
def T(l):
    X, Y = -m.log(rd.random())/l, -m.log(rd.random())/l
    return MaxRacine(X,-Y)
```

c. Pour estimer l'espérance de T, on calcule la moyenne arithmétique d'un grand nombre de réalisations de T :

```
def EspT(l,N):
    return sum([T(l) for _ in range(N)])/N
```

L'instruction `MoyT(1,10000)` affiche une valeur approchée de l'espérance de T $\boxed{\text{pour } \lambda = 1 : E(T) \approx 0.605}$.

4. **a.** Soit $t \in \mathbb{R}^+$. D'après **3a.**, $T = \dfrac{-X + \sqrt{X^2 + 4Y}}{2}$ donc $T \leqslant t \Leftrightarrow \sqrt{X^2 + 4Y} \leqslant X + 2t$.

Comme $X + 2t \geqslant 0$, $T \leqslant t \Leftrightarrow X^2 + 4Y \leqslant (X + 2t)^2 \Leftrightarrow X^2 + 4Y \leqslant X^2 + 4Xt + 4t^2$

On a bien : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}^+, [T \leqslant t] = [Y - tX \leqslant t^2]}$.

b. D'après **3a.**, $T(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$ et d'après **4a.**, $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $P(T \leqslant t) = P(Y - tX \leqslant t^2) = P(R_t \leqslant t^2)$ où $R_t = Y - tX$.

D'après **1b.**, $P(R_t \leqslant t^2) = \int_{-\infty}^{t^2} f_t(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \dfrac{\lambda}{t+1} e^{\frac{\lambda}{t}x}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{t^2} \dfrac{\lambda}{t+1} e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$

$$= \frac{t}{t+1}\left[e^{\frac{\lambda}{t}x}\right]_{-\infty}^{0} - \frac{1}{t+1}\left[e^{-\lambda x}\right]_0^{t^2} = \frac{t}{t+1} + \frac{1 - e^{-\lambda t^2}}{t+1}.$$

On pose alors : $\forall t \in \mathbb{R}$, $F_T(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{e^{-\lambda t^2}}{t+1} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Comme $F_T(0) = 0$, F_T est continue en 0, étant continue par ailleurs, F_T est continue sur $\mathbb{R}$. De plus F_T est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 donc F_T est bien la fonction de répartition d'une variable à densité.

On en conclut que :

$$\boxed{\text{une densité de } T \text{ est définie par : } \forall t \in \mathbb{R},\ f_T(t) = \begin{cases} \left[\dfrac{2\lambda t}{t+1} + \dfrac{1}{(t+1)^2}\right] e^{-\lambda t^2} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}.$$