Corrigé DS n°5

Exercice 1

1. Montrons par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N}$, I_k est convergente et $I_k = k!$.

Initialisation : pour $k = 0$, $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x$ est convergente et égale à 1 car on reconnait la densité d'une loi exponentielle de paramètre 1.

Comme $0! = 1$ on a bien I_0 est convergente et $I_0 = 0!$.

Hérédité : supposons que I_k soit convergente et $I_k = k!$, montrons que I_{k+1} est convergente et $I_{k+1} = (k+1)!$: or $I_{k+1} = \int_0^{+\infty} x^{k+1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Par intégration par parties, en posant $u = x^{k+1}$ et $v' = e^{-x}$ on a $u' = (k+1)x^k$ et $v = -e^{-x}$, u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)v(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -x^{k+1}e^{-x} = 0$ par croissances comparées.

On en déduit que I_{k+1} est convergente si, et seulement si, $\int_0^{+\infty} x^k e^{-x}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

D'après l'hypothèse de récurrence, c'est le cas puisqu'on reconnait I_k donc I_{k+1} est convergente.

De plus $I_{k+1} = [-x^{k+1}e^{-x}]_0^{+\infty} + (k+1)\int_0^{+\infty} x^k e^{-x}\,\mathrm{d}x = (k+1)I_k$. Comme, par hypothèse de récurrence, $I_k = k!$, on a bien $I_{k+1} = (k+1)!$

Conclusion : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ I_k \text{ est convergente et } I_k = k!}$.

2. **a.** Soit $m \geqslant 1$. $J(1,m) = \int_0^x (x-t)^{m-1}\,\mathrm{d}t = \left[-\dfrac{(x-t)^m}{m}\right]_0^x$ donc $\boxed{J(1,m) = \dfrac{x^m}{m}}$.

b. Soit $m \geqslant 1$. On effecture une intégration par parties en posant $u = t^{n-1}$ et $v = -\dfrac{(x-t)^m}{m}$.

Les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0,x]$ et $u' = (n-1)t^{n-2}$ et $v' = (x-t)^{m-1}$

donc $J(n,m) = \left[-t^{n-1}\dfrac{(x-t)^m}{m}\right]_0^x + \dfrac{n-1}{m}\int_0^x t^{n-2}(x-t)^m\,\mathrm{d}t$.

On a bien : $\boxed{\forall n \geqslant 2,\ J(n,m) = \dfrac{n-1}{m}J(n-1,m+1)}$.

c. On en déduit, de proche en proche, que

$J(n,m) = \dfrac{n-1}{m} \times \dfrac{n-2}{m+1} \times \cdots \times \dfrac{1}{m+n-2} \times J(1,m+n-1)$.

D'après **a.**, $J(1,m+n-1) = \dfrac{x^{m+n-1}}{m+n-1}$. On a bien $\boxed{J(n,m) = \dfrac{(n-1)!(m-1)!}{(n+m-1)!}x^{n+m-1}}$.

3. On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{1}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-x}$ si $x > 0$ et 0 sinon

Comme $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) \geqslant 0$.

La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$ sauf, éventuellement en 0.

L'intégrale $K = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{(n-1)!}\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}\,\lambda\mathrm{d}x$ est impropre en $+\infty$.

On reconnait l'intégrale I_{n-1} dont on a montré la convergence et trouvé la valeur $I_{n-1} = (n-1)!$ en **1**.

On en conclut que l'intégrale $K = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente et $K = 1$.

$\boxed{\text{La fonction } f_n \text{ est bien une densité de probabilité}}$.

4. Soit X une variable aléatoire de loi $\Gamma(n)$.

$\int_{-\infty}^{+\infty} |xf_n(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \dfrac{x}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{(n-1)!}\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$ est convergente car on reconnait l'intégrale I_n de la question **1**. et elle vaut $\dfrac{1}{(n-1)!}I_n$

donc $\boxed{X \text{ admet une espérance et } E(X) = n}$.

5. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi gamma $\Gamma(n)$ et $\Gamma(m)$ respectivement.

Comme X et Y sont indépendantes, d'après le rappel, $X+Y$ est une variable à densité dont une densité est donnée par convolution de f_X et f_Y :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)f_Y(x-t)\,\mathrm{d}t$. Or $f_X(t)f_Y(x-t) \neq 0 \Leftrightarrow t > 0$ et $x - t > 0 \Leftrightarrow 0 < t < x$.

Si $x < 0$ alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_X(t)f_Y(x-t) = 0$ donc $f_{X+Y}(x) = 0$.

Si $x \geqslant 0$ alors $f_{X+Y}(x) = \int_0^x \frac{1}{(n-1)!}(\lambda t)^{n-1}e^{-t}\frac{1}{(m-1)!}(\lambda(x-t))^{m-1}e^{-(x-t)}\,\mathrm{d}t$

$= \frac{e^{-x}}{(n-1)!(m-1)!}\int_0^x t^{n-1}(x-t)^{m-1}\,\mathrm{d}t.$

On reconnait l'intégrale $J(n,m)$ de la question **2**. donc

$f_{X+Y}(x) = \frac{e^{-x}}{(n-1)!(m-1)!}J(n,m) = \frac{e^{-x}}{(n+m-1)!}x^{n+m-1}.$

En conclusion, une densité de $X+Y$ est définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f_{X+Y}(x) = \begin{cases} \frac{1}{(n+m-1)!}x^{n+m-1}e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On a bien montré que $\boxed{X+Y \text{ suit une loi } \Gamma(n+m)}$.

6. **a.** Soi X une variable aléatoire de loi gamma de paramètres 1. Une densité de X est alors définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

On reconnait que $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \text{ donc } E(X) = 1 \text{ et } V(X) = 1}$.

b. D'après **6a**., $S_1 = X_1$ suit une loi $\Gamma(1)$, d'après **5**., $S_2 = X_1 + X_2$ suit une loi $\Gamma(2)$.

On émet l'hypothèse que $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ suit une loi $\Gamma(n)$, montrons-le par récurrence :

Initialisation : pour $n = 1$, $S_1 = X_1$ suit une loi $\Gamma(1)$. La propriété est vérifiée.

Hérédité : supposons que $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ suive une loi $\Gamma(n)$

et montrons $S_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} X_i$ suit une loi $\Gamma(n+1)$.

Or $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$. D'après l'hypothèse de récurrence, $S_n \hookrightarrow \Gamma(n)$ or $X_{n+1} \hookrightarrow \Gamma(1)$ donc, d'après **5**. et comme les variables S_n et X_{n+1} sont indépendantes, $S_n + X_{n+1} \hookrightarrow \Gamma(n+1)$.

On a bien $S_{n+1} \hookrightarrow \Gamma(n+1)$.

Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow \Gamma(n)}$.

7. Comme $X(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$ et $R = \ln X$, $R(\Omega) = \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $P(R \leqslant x) = P(\ln X \leqslant x) = P(X \leqslant e^x) = F_n(e^x)$ où F_n est la fonction de répartition de X.

On pose $\forall x \in \mathbb{R},\ G_n(x) = F_n(e^x)$.

Par composition, G_n est continue sur $\mathbb{R}$ et même de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc G_n est la fonction de répartition d'une variable à densité dont une densité est donnée par :

$\forall x \in \mathbb{R},\ g_n(x) = e^x F_n'(e^x) = e^x f_n(e^x)$.

On conclut que

$\boxed{R = \ln X \text{ est une variable à densité dont une densité est définie par : } \forall x \in \mathbb{R},\ g_n(x) = \frac{e^{nx}}{(n-1)!}e^{-e^x}}$.

Exercice 2

1. Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $A = (a_{ij})_{(i,j)\in\{1,\cdots,n\}^2}$ et $B = (b_{ij})_{(i,j)\in\{1,\cdots,n\}^2}$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$Tr(\lambda A + B) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda a_{ii} + b_{ii}) = \lambda\sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \lambda Tr(A) + Tr(B)$.

On a montré que $\boxed{\text{l'application } Trace \text{ est une application linéaire}}$.

2. **a.** Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \in \mathbb{R}$ donc $\mathrm{Im}(Tr) \subset \mathbb{R}$.

Réciproquement, soit $x \in \mathbb{R}$ alors, en choisissant la matrice A dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indice $(1,1)$ qui vaut x. Alors $Tr(A) = x$ donc $x \in \mathrm{Im}(Tr)$ et $\mathbb{R} \subset \mathrm{Im}(Tr)$.

La double inclusion permet de conclure que $\boxed{\mathrm{Im}(Tr) = \mathbb{R}}$.

b. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie égale à n^2, le théorème du rang donne $\dim\ker(Tr) + \dim\mathrm{Im}(Tr) = \dim\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Comme $\mathrm{Im}(Tr) = \mathbb{R}$, $\dim\mathrm{Im}(Tr) = 1$ donc $\boxed{\dim\ker(Tr) = n^2 - 1}$.

3. **a.** Soit $(M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$g(\lambda M + N) = (\lambda M + N) + Tr(\lambda M + N) \times J$ or l'application $Trace$ est linéaire

donc $g(\lambda M + N) = \lambda M + N + (\lambda Tr(M) + Tr(N)) \times J = \lambda(M + Tr(M) \times J) + (N + Tr(N) \times J)$.

Ainsi $\forall (M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $g(\lambda M + N) = \lambda g(M) + g(N)$: g est linéaire.

De plus, comme $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $g(M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On en conclut que $\boxed{g \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

b. Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on calcule $g^2(M) - 2g(M) + M$:

$g^2(M) = g(g(M)) = g(M + Tr(M) \times J) = g(M) + Tr(M)g(J)$ car g est linéaire.

Or $g(J) = J + Tr(J) \times J = J$ car $Tr(J) = 0$. On en déduit que

$g^2(M) = g(M) + Tr(M)J = M + 2Tr(M) \times J$.

On a alors : $g^2(M) - 2g(M) + M = M + 2Tr(M) \times J - 2(M + Tr(M) \times J) + M$.

On a montré que : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $g^2(M) - 2g(M) + M = 0$ et donc que $\boxed{g^2 - 2g + id = 0}$.

c. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Par définition λ est valeur propre de $g \Leftrightarrow \exists M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \neq 0$ telle que $g(M) = \lambda M$.

On en déduit que $g(g(M)) = \lambda g(M) = \lambda^2 M$ et donc $g^2(M) - 2g(M) + M = \lambda^2 M - 2\lambda M + M$.

Comme $g^2(M) - 2g(M) + M = 0$ et $M \neq 0$, $\lambda^2 M - 2\lambda M + M = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

Ainsi, on a montré que $\boxed{\text{si } \lambda \text{ est valeur propre de } g \text{ alors } \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0}$.

d. Comme $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$, d'après **c.**, si λ est valeur propre de g alors $\lambda = 1$.

On sait par ailleurs que g est diagonalisable si, et seulement si, la somme des dimensions des sous-espaces propres de g est égale à $\dim\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = n^2$.

En supposant que 1 soit effectivement valeur propre de g, pour que g soit diagonalisable, il faudrait $\dim E_1(g) = n^2$.

Or $M \in E_1(g) \Leftrightarrow g(M) = M \Leftrightarrow Tr(M) = 0$ car $J \neq 0$ donc $E_1(g) = \ker(Tr)$.

D'après **2b.**, $\dim\ker(Tr) = n^2 - 1$ donc $\dim E_1(g) = n^2 - 1$.

On en conclut que $\boxed{\text{l'endomorphisme } g \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

e. D'après **c.**, si λ est valeur propre de g alors $\lambda = 1$ donc 0 n'est pas valeur propre de g. On en déduit que l'endomorphisme g est bijectif et donc que $\boxed{g \text{ est un automorphisme de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

4. Soit $A = (a_{ij})_{(i,j)\in\{1,\cdots,n\}^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A^\top = (a'_{ij})_{(i,j)\in\{1,\cdots,n\}^2}$ alors $\forall (i,j) \in \{1,\cdots,n\}^2$, $a'_{ij} = a_{ji}$.

Pour $i = j$, on obtient $\forall i \in \{1,\cdots,n\}$, $a'_{ii} = a_{ii}$ donc $\sum_{i=1}^{n} a'_{ii} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Ainsi $\boxed{\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ Tr(A) = Tr(A^\top)}$.

5. Soit $A = (a_{ij})_{(i,j)\in\{1,\cdots,n\}^2}$, $B = (b_{ij})_{(i,j)\in\{1,\cdots,n\}^2}$, $C = AB = (c_{ij})_{(i,j)\in\{1,\cdots,n\}^2}$ et $D = BA = (d_{ij})_{(i,j)\in\{1,\cdots,n\}^2}$.

a. Par définition du produit matriciel, $\boxed{\forall (i,j) \in \{1,\cdots,n\}^2,\ c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \text{ et } d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj}}$.

b. On en déduit que $Tr(C) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ki}a_{ik}\right) = \sum_{k=1}^{n} d_{kk} = Tr(D)$.

On a ainsi montré que : $\boxed{\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ Tr(AB) = Tr(BA)}$.

c. Par définition, A et B sont semblables si, et seulement s'il existe une matrice carrée inversible P telle que $B = P^{-1}AP$.

On a alors $Tr(B) = Tr(P^{-1}AP)$. D'après **b.**, $Tr(P^{-1}(AP)) = Tr((AP)P^{-1})$ donc $Tr(P^{-1}AP) = Tr(APP^{-1})$.

On en conclut que $Tr(B) = Tr(A)$ et donc que $\boxed{\text{deux matrices semblables ont même trace}}$.