Devoir Surveillé n°5 - Samedi 17 février (8h-10h)

Documents écrits, électroniques, calculatrices et téléphones portables interdits.
La plus grande attention sera apportée à la qualité de la rédaction, syntaxe et orthographe comprises.
Cet énoncé est constitué de deux exercices indépendants.

Exercice 1

Partie 1 : questions préliminaires

1. Pour tout entier naturel k, on pose $I_k = \int_0^{+\infty} x^k e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Montrer par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N}$, I_k est convergente et $I_k = k!$.

2. Pour tous entiers strictement positifs n et m, et tout réel $x > 0$, on pose : $J(n,m) = \int_0^x t^{n-1}(x-t)^{m-1}\,\mathrm{d}t$.

- **a.** Calculer $J(1,m)$ pour tout entier $m \geqslant 1$.
- **b.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $J(n,m) = \dfrac{n-1}{m} J(n-1,m+1)$.
- **c.** En déduire que $J(n,m) = \dfrac{(n-1)!(m-1)!}{(n+m-1)!} x^{n+m-1}$.

Dans tout l'exercice, λ désigne un nombre réel strictement positif.

Partie 2 : variable aléatoire de loi Gamma

3. Soit n un entier strictement positif. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Montrer que la fonction f_n est une densité de probabilité.

On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi gamma** de paramètre n, et on note $X \hookrightarrow \Gamma(n)$, si une densité de X est la fonction f_n.

4. Soit n un entier strictement positif et X une variable aléatoire de loi $\Gamma(n)$.
Montrer que X admet une espérance et la calculer.

5. On rappelle que si X et Y sont deux variables aléatoires à densité indépendantes de densité f_X et f_Y respectivement, alors $X+Y$ est une variable à densité dont une densité est donnée par le produit de convolution de f_X et f_Y : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t)\,\mathrm{d}t$.

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi gamma $\Gamma(n)$ et $\Gamma(m)$ respectivement.
Montrer que $X+Y$ suit une loi $\Gamma(n+m)$.

6.

- **a.** Soit X une variable aléatoire de loi $\Gamma(1)$.
  Reconnaître la loi de X, rappeler son espérance et sa variance.
- **b.** Soit n un entier strictement positif et $X_1, \cdots, X_n$, n variables independantes toutes de même loi exponentielle de paramètre 1.
  Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ est une variable aléatoire de loi Γ dont on précisera le paramètre.

7. Soit X une variable aléatoire de loi $\Gamma(n)$.
Montrer que $R = \ln X$ est une variable à densité dont une densité est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_n(x) = \frac{e^{nx}}{(n-1)!} e^{-e^x}.$$

Exercice 2

Dans tout l'exercice, pour toute matrice N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note n_{ij} ses coefficients.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On appelle **trace** de A la somme de ses éléments diagonaux.
Ainsi, on définit l'application *Trace*, notée Tr, définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

1. Monter que l'application *Trace* est une application linéaire.

2. **a.** Montrer que $\mathrm{Im}(Tr) = \mathbb{R}$.
b. En déduire la dimension du noyau $\ker(Tr)$.

3. Soit J une matrice non nulle quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la trace est nulle.
On définit l'application g sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ g(M) = M + Tr(M) \times J$$

a. Montrer g est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
b. On note g^2 l'application $g^2 = g \circ g$ et id est l'application identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que $g^2 - 2g + id = 0$.
c. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Montrer que si λ est valeur propre de g alors $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$.
d. L'endomorphisme g est-il diagonalisable ?
e. Montrer que g est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4. Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, A^{T} désigne la transposée de A.
Montrer que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ Tr(A^{\mathsf{T}}) = Tr(A)$.

5. **a.** Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. On pose $C = AB$ et $D = BA$.
Rappeler les expressions de c_{ij} et d_{ij} pour tout (i,j) de $\{1,\cdots,n\}^2$.
b. Montrer que $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ Tr(AB) = Tr(BA)$.
c. En déduire que deux matrices semblables ont même trace.