Couples de variables aléatoires réelles discrètes

Ce qu'il faut connaître :

-la définition d'un couple de variables aléatoires réelles discrètes
-la notion de système complet d'événements lié à un couple de variables aléatoires discrètes
-la définition de la loi conjointe ou loi du couple de variables aléatoires discrètes
-la définition des lois marginales d'un couple de variables aléatoires discrètes
-la définition de la loi d'une variable discrète conditionnée par une autre variable discrète
-la définition de l'indépendance de deux variables aléatoires discrètes pour une probabilité P
-la définition de l'indépendance deux à deux de n variables aléatoires discrètes
-la définition de l'indépendance mutuelle de n variables aléatoires discrètes
-la stabilité de la loi binomiale pour une somme de variables indépendantes
-la stabilité de la loi de Poisson pour une somme de variables indépendantes
-le théorème de transfert pour un couple de variables aléatoires finies
-la définition de la covariance de deux variables aléatoires discrètes
-le théorème de Koënig-Huygens
-les propriétés de symétrie et de bilinéarité de la covariance
-le lien entre indépendance et corrélation linéaire
-la formule de la variance d'une somme de variables aléatoires discrètes

1. **Comment montrer qu'une formule donnée définit bien la loi d'un couple de variables discrètes**
Si l'énoncé donne $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ et une formule $P(X = i, Y = j)$ pour tout (i,j) de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$
alors il faut vérifier que :
-$\forall (i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega),\ P(X = i, Y = j) \geqslant 0$
-$\displaystyle\sum_{(i,j)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} P(X = i, Y = j) = 1$

2. **Comment déterminer la loi d'un couple (X,Y) de variables discrètes**
   a. -on détermine les univers images $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$
   -pour tout (i,j) de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$, on détermine $P(X = i, Y = j)$
   b. si l'énoncé donne la loi conditionnelle de X sachant Y alors
   $\forall (i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega),\ P(X = i, Y = j) = P(Y = j)P_{Y=j}(X = i)$

3. **Comment déterminer les lois marginales d'un couple (X,Y) de variables discrètes**
   a. si on connait la loi du couple (X,Y) alors
   -la loi marginale de X est donnée par : $\forall i \in X(\Omega),\ P(X = i) = \displaystyle\sum_{j\in Y(\Omega)} P(X = i, Y = j)$
   -la loi marginale de Y est donnée par : $\forall j \in Y(\Omega),\ P(Y = j) = \displaystyle\sum_{i\in X(\Omega)} P(X = i, Y = j)$
   b. si l'énoncé donne la loi conditionnelle de X sachant Y alors
   la loi marginale de X est donnée par : $\forall i \in X(\Omega),\ P(X = i) = \displaystyle\sum_{j\in Y(\Omega)} P(Y = j)P_{Y=j}(X = i)$

4. **Comment déterminer les lois conditionnelles d'un couple (X,Y) de variables discrètes**
on les détermine à partir de la loi conjointe et des lois marginales :
$\forall (i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega),\ P_{Y=j}(X = i) = \dfrac{P(X = i, Y = j)}{P(Y = j)}$
$\forall (i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega),\ P_{X=i}(Y = j) = \dfrac{P(X = i, Y = j)}{P(X = i)}$

5. **Comment montrer que deux variables discrètes X et Y sont indépendantes**
   a. la plus part du temps, l'indépendance découle de la modélisation adoptée dans l'énoncé
   b. par le calcul, on montre que $\forall (i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega),\ P(X = i, Y = j) = P(X = i)P(Y = j)$

6. Comment calculer la covariance de deux variables discrètes X et Y

a. si les variables X et Y sont indépendantes alors $cov(X,Y) = 0$

b. -on détermine les espérances $E(X)$, $E(Y)$ et $E(XY) = \sum_{(i,j)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} ijP(X = i, Y = j)$

-on calcule $cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

c. si X et Y sont fonction d'autres variables alors on peut utiliser les propriétés de la covariance

d. Si on connaît la loi de $X + Y$ alors $cov(X,Y) = \frac{1}{2}[V(X+Y) - V(X) - V(Y)]$.

7. Comment montrer que deux variables discrètes X et Y ne sont pas indépendantes

a. on trouve un couple (i,j) de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ tel que $P(X = i, Y = j) \neq P(X = i)P(Y = j)$

b. si on a la covariance, on vérifie que $cov(X,Y) \neq 0$

8. Comment déterminer la loi de $Z = f(X,Y)$ où (X,Y) est un couple de variables discrètes

on a $Z(\Omega) \subset f(X(\Omega) \times Y(\Omega))$ et

a. $\forall z \in Z(\Omega),\ P(Z = z) = \sum_{(i,j)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)\,|\,f(i,j)=z} P(X = i, Y = j)$

b. si $Z = X + Y$ alors $\forall z \in Z(\Omega),\ P(Z = z) = \sum_{i\in X(\Omega)} P(X = i, Y = z - i)$

c. si $Z = X - Y$ alors $\forall z \in Z(\Omega),\ P(Z = z) = \sum_{i\in X(\Omega)} P(X = i, Y = i - z) = \sum_{j\in Y(\Omega)} P(X = j + z, Y = j)$

9. Comment déterminer la loi de $Z = \sum_{i=1}^{n} X_i$ quand les n vard $X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes

a. Si les X_i suivent une loi binomiale : $\forall i \in [\![1,n]\!],\ X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n_i,p)$

alors $S = \sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ où $n = \sum_{i=1}^{n} n_i$

b. si les X_i suivent une loi de Poisson : $\forall i \in [\![1,n]\!],\ X_i \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_i)$

alors $S = \sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ où $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$