TD 16 : Couples de variables aléatoires discrètes

1 Exercices d'application du cours

1 Soit $N \geqslant 1$ un entier naturel. Dans une petite ville proposant trois hôtels $\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_2$ et $\mathscr{H}_3$, N personnes choisissent un hôtel au hasard. Soit X_i la variable aléatoire égale au nombre de personnes ayant choisi de séjourner dans l'hôtel $\mathscr{H}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$.

1. Donner les lois de X_1, X_2 et X_3.
2. Donner la loi de $X_1 + X_2$.
3. Calculer ses espérance et variance.
4. Calculer le coefficient de corrélation entre X_1 et X_2.

2 Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Deux urnes contiennent chacune n boules numérotées de 1 à n. On tire une boule de chaque urne. On note X et Y les variables aléatoires égales respectivement au plus petit et au plus grand numéro tiré.

1. (a) Calculer la loi du couple (X, Y).
   (b) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
   (c) Calculer leur espérance.
2. Donner la loi de la somme $Z = X + Y$.

3 Soit λ, μ deux réels strictement positifs. Au péage d'une autoroute, le nombre aléatoire X de véhicules dans le sens Paris-Province suit une loi de Poisson de paramètre λ, et dans l'autre sens, ce nombre aléatoire Y suit une loi de Poisson de paramètre μ. On suppose les variables X et Y mutuellement indépendantes.

1. Soit Z le nombre total de véhicules passant au péage. Donner la loi de Z.
2. Soit k, n deux entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant n$.
   Quelle est la probabilité que, sur n véhicules passant au péage, k viennent de Paris ?

2 Exercices d'application du cours

4 On considère une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n. On extrait deux jetons avec remise.
Calculer la loi de la somme des numéros tirés.

5 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi même loi donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathrm{P}(X = k) = \frac{1}{2^{k+1}}.$$

On pose $Z = \max(X, Y)$ et $T = \min(X, Y)$.

1. Trouver les lois de Z et T, puis celle du couple (Z, T).
2. Les variables Z et T sont-elles indépendantes ?
3. Calculer la covariance de (Z, T).

6 Soit p un entier supérieur ou égal à 2. Une machine distribue à Bob des dés équilibrés à p faces. Le nombre de dés distribués est une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre λ.
On note Y le nombre de 1 obtenus par Bob lorsqu'il lance ces dés.
Déterminer la loi de Y.

7 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Soit U, V les variables aléatoires définies par

$$U = |X - Y| \quad \text{et} \quad V = \min(X, Y).$$

1. Donner la loi du couple (U, V).
2. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?

$\boxed{8}$ Soit $n \geqslant 1$ un entier et $p \in [0,1]$ un réel. On considère n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ mutuellement indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p.
Pour tout $i \in \{1 \ldots n-1\}$, on note $Y_i = X_i \, X_{i+1}$ et on définit la variable S_n par :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n-1} Y_i.$$

1. Donner la loi de Y_i pour $i \in \{1 \ldots n-1\}$. En déduire l'espérance de S_n.
2. Développer ${S_n}^2$ puis calculer l'espérance de ${S_n}^2$.
3. En déduire la variance de S_n.

$\boxed{9}$ Une puce se déplace dans un repère orthonormé. À l'instant 0, elle est à l'origine. À chaque instant, elle va soit vers le nord, soit vers le sud, soit vers l'est, soit vers l'ouest de façon équiprobable. Elle saute d'une unité à la fois.
On désigne par (X_n, Y_n) les coordonnées de la puce après n sauts.

1. Sans chercher à déterminer la loi, calculer l'espérance et la variance de X_n.
   Utiliser les variables $E_n + O_n$ et $E_n - O_n$ après avoir défini les variables E_n et O_n.
2. Soit R_n la distance du point à l'origine après n sauts.
   Calculer $\mathrm{E}({R_n}^2)$ et sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

3 Autre exercice

$\boxed{10}$ Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, de même loi :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{P}(X = k) = pq^k \quad \text{où} \quad p \in]0,1[\quad \text{et} \quad q = 1 - p.$$

1. Trouver la loi de $Z = X + Y$. Calculer son espérance et sa variance.
2. On suppose que $X_1, \ldots, X_n$ sont des VAR indépendantes de même loi que X.
   Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{P}(S_n = k) = \binom{n-1+k}{n-1} p^n q^k.$$

3. (a) Calculer $\mathrm{P}(X = Y)$.
   (b) En remarquant que $(X < Y)$, $(X = Y)$ et $(X > Y)$ forment un système complet d'événements, calculer $\mathrm{P}(X < Y)$.
4. Trouver la loi de $T = X - Y$. Calculer son espérance et sa variance.