DM10	Matrice de Gram

pour lundi 18 mars

Soit $u_1, \cdots, u_p,\ p$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
On appelle matrice de Gram de la famille $(u_1, \cdots, u_p)$ la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ égale à

$$G = (\langle u_i, u_j\rangle)_{(i,j)\in[\![1,p]\!]}$$

où $\langle u_i, u_j\rangle$ désigne le produit scalaire des vecteurs u_i et u_j.

1. **a.** Écrire une fonction Python `prod_scal`(u, v) prenant en argument deux vecteurs u et v qui renvoie le produit scalaire $\langle u, v\rangle$.
Sous Python, on représentera un vecteur de $\mathbb{R}^n$ par la liste de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

b. Écrire une fonction Python `Gram`(L) prenant en argument une liste L qui renvoie la matrice de Gram de la famille $L = (u1, \dots, up)$ de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

2. Justifier que la matrice G est diagonalisable.

3. Dans cette question, et uniquement dans cette question, on prend $p = 2$.
Montrer que la matrice de Gram de la famille (u_1, u_2) est inversible si, et seulement si, la famille (u_1, u_2) est libre.

4. On revient au cas général et on suppose que la matrice G est inversible.

Soit $a_1, \cdots, a_p,\ p$ nombres réels tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_k u_k = 0.$ On note X la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}$.

a. Montrer que : $\forall i \in [\![1,p]\!],\ \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_k\langle u_i, u_k\rangle = 0.$

b. En déduire que $GX = 0$ puis que la famille $(u_1, \cdots, u_p)$ est libre.

5. Soit $v_1, \cdots, v_n,\ n$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tels que

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \|v_i\| = 1 \text{ et } \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \text{ telque } i \neq j,\ \|v_i - v_j\| = 1.$$

a. Montrer que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \|v_i - v_j\|^2 = \|v_i\|^2 + \|v_j\|^2 - 2 < v_i, v_j >$.

b. En déduire la matrice de Gram G de la famille $(v_1, \dots, v_n)$.

c. On pose $A = 2G$.
Exprimer A^2 en fonction de n, A et de la matrice identité I_n.

d. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que si λ est valeur propre de A alors $\lambda^2 - (n+2)\lambda + (n+1) = 0$.
Diagonaliser G.

e. Montrer que la matrice G est inversible.
En déduire que la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.