Convergences et théorèmes limite

Ce qu'il faut connaître :
-l'Inégalité de Markov
-l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev
-la loi faible des grands nombres
-la convergence en loi dans le cas d'une variable à valeurs dans $\mathbb{N}$
-la convergence en loi dans le cas général
-le théorème central limite (1ère et 2e formes)
-l'approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson
-théorème de Moivre-Laplace : approximation d'une loi binomiale par une loi normale
-l'approximation d'une loi de Poisson par une loi normale
-test de conformité sur la moyenne

1. Comment utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev

a. pour majorer la probabilité d'un événement qui peut s'écrire sous la forme $[|X - E(X)| \geqslant \varepsilon]$

b. pour minorer la probabilité d'un événement qui peut s'écrire sous la forme $[|X - E(X)| < \varepsilon]$

2. Comment approximer la loi d'une somme de variables indépendantes et de même loi

on utilise le théorème central limite : si $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $E(X_k) = \mu$ et $V(X_k) = \sigma^2$ alors, pour $n \geqslant 30$ on approxime la loi de $M_n^* = \dfrac{M_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ par la loi $\mathcal{N}(0,1)$

3. Comment approximer la loi d'une variable aléatoire X usuelle

quand aucune indication n'est donnée dans l'énoncé

a. si on reconnaît que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, on s'assure que $n \geqslant 30$
-si p est très petit ($p \leqslant \frac{1}{10}$), on peut approximer la loi de X par la loi $\mathcal{P}(np)$
-sinon, on s'assure que $np \geqslant 5$, $n(1-p) \geqslant 5$ et on peut approximer la loi de X^* par $\mathcal{N}(0,1)$
pour approximer $P(X = k)$, on calcule $P\left(k - \frac{1}{2} \leqslant X < \frac{1}{2}\right)$

b. si on reconnaît que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$
on s'assure que $\lambda \geqslant 15$ et on peut approximer la loi de X^* par $\mathcal{N}(0,1)$
pour approximer $P(X = k)$, on calcule $P\left(k - \frac{1}{2} \leqslant X < \frac{1}{2}\right)$

4. Comment tester une moyenne observée μ et une moyenne théorique μ_0 au risque α

On dispose de $X_1, \cdots, X_n$ n valeurs observées d'une variable X d'espérance μ inconnue
-on calcule la moyenne $M_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ et la variance empirique $S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M_n)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - M_n^2$
-on détermine $u = U_{1-\frac{\alpha}{2}} = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ à l'aide de Python, la calculatrice ou une table
valeurs usuelles : $U_{0,95} = 1{,}645$ (pour $\alpha = 10$ %) et $U_{0,975} = 1{,}96$ (pour $\alpha = 5$ %)
Si $M_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}}u \leqslant \mu_0 \leqslant M_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}}u$ on accepte l'hypothèse $H : \mu = \mu_0$ au risque α sinon, on la rejette

5. Comment tester une proportion observée p et une proportion théorique p_0 au risque α

On dispose de $X_1, \cdots, X_n$ n valeurs observées d'une variable de Bernoulli X de paramètre p inconnu
-on calcule la fréquence $F_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
-on détermine $u = U_{1-\frac{\alpha}{2}} = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ (cf **4.**)
Si $F_n - \frac{u}{2\sqrt{n}} \leqslant p_0 \leqslant F_n + \frac{u}{2\sqrt{n}}$ on accepte l'hypothèse $H : p = p_0$ au risque α sinon, on la rejette