TD 17 : Théorèmes limites

1 Un étudiant légendaire ne faisait en moyenne qu'une faute d'orthografe tous les 500 mots.
Quelle est la probabilité qu'il ne fasse pas plus de 5 fautes dans un devoir contenant 200 mots ?
On utilisera l'approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson.

2 On jette 12 000 fois un dé équilibré.
Estimer par un théorème d'approximation la probabilité que le nombre de 6 obtenus soit compris entre 1 800 et 2 100.

3 Une entreprise compte 300 employés. Chacun d'eux téléphone en moyenne 6 minutes par heure.
Quel est le nombre de lignes téléphoniques que l'entreprise doit installer pour que la probabilité que toutes les lignes soient utilisées au même instant soit au plus égal à $2,5\%$?

4 Un commando de soldats doit traverser une rivière, malheureusement infestée de crocodiles. La probabilité qu'un soldat soit dévoré au cours de la traversée est de $1/10$. Combien faut-il envoyer de soldats pour que la probabilité d'avoir au moins 300 personnes sur l'autre rive soit supérieure à 95 % ?

5 Un chef de projet informatique estime la taille du projet qu'on lui demande de réaliser à environ 10 000 fonctions. Chaque jour, chacun de ses 10 ingénieurs code un nombre de fonctions. Chaque réalisation demande un temps aléatoire, suivant une certaine loi. La durée de codage d'une fonction suit une loi à densité, exprimée en journées. Proposer un intervalle de confiance pour la durée moyenne du projet (en nombre de jours) dans les cas où la durée du codage d'une fonction :

1. suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1/2]$,
2. suit la loi exponentielle de paramètre 4.

On utilisera d'une part l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et d'autre part l'approximation par une loi normale et on comparera les résultats.

6 Soit p un réel de l'intervalle $]0;1[$. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre p.
Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_i = X_i + X_{i+1}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $M_n = \dfrac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n}$.

1. Rappeler la loi faible des grands nombres.
2. Les variables aléatoires Y_n sont-elles indépendantes ?
3. Calculer l'espérance et la variance de M_n.
4. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}\left(|M_n - 2p| > \varepsilon\right) = 0.$$