

Semaine 20
du lundi 18 au vendredi 22 mars 2023

Couples de variables aléatoires réelle discrètes

Couple (X, Y) de variables aléatoires réelle discrètes

L'événement $[X = x] \cap [Y = y]$ est noté $[X = x, Y = y]$

Loi conjointe

Lois marginales

Lois conditionnelles

Théorème de transfert : espérance de $u(X, Y)$ où X et Y sont finies et u est une fonction positive

Covariance

Espérance et Variance de $X + Y$

Deux variables X et Y sont indépendantes si, et seulement si, pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$,
 $P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$.

Si X et Y sont deux variables indépendantes alors

$u(X)$ et $v(Y)$ sont indépendantes

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

$$\text{Cov}(X, Y) = 0$$

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

Sur des exemples simples, recherche de la loi de $u(X, Y)$, le couple (X, Y) ayant une loi conjointe connue

Cas particulier de la somme de deux variables discrètes à valeurs dans \mathbb{N}

Loi de la somme de deux variables indépendantes suivant des lois binomiales de même paramètre p

Loi de la somme de deux variables indépendantes suivant des lois de Poisson

Généralisation au cas de n variables indépendantes

Théorèmes limites

Inégalité de Markov.

Inégalité de Bienaymé–Tchebychev.

Convergence en probabilités.

Loi faible des grands nombres.

Convergence en loi dans le cas d'une variable à valeurs dans \mathbb{N} .

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson.

Théorème central limite (première forme) : $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(a < M_n^* < b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-t^2/2} dt$.

théorème de de Moivre–Laplace.

Approximation d'une loi de Poisson par une loi normale.

Moyenne empirique, notée M_n ou \bar{X}_n

Variance empirique, notée S_n^2

Théorème central limite (seconde forme utilisée quand on ne connaît pas σ^2) :

Test de conformité sur la moyenne :

$$\text{On accepte l'hypothèse } \mu = \mu_0 \text{ si } \mu_0 \in \left[M_n - u \sqrt{\frac{S_n^2}{n}}, M_n + u \sqrt{\frac{S_n^2}{n}} \right] \text{ où } u = \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right)$$

Test de conformité sur une proportion :

$$\text{On accepte l'hypothèse } p = p_0 \text{ si } p_0 \in \left[M_n - \frac{u}{2\sqrt{n}}, M_n + \frac{u}{2\sqrt{n}} \right] \text{ où } u = \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right)$$

Questions de cours

Définition de la loi conjointe de deux variables aléatoires réelles discrètes

Comment déterminer les lois marginales d'un couple (X, Y) de variables aléatoires réelles discrètes si on connaît la loi conjointe ?

Définition de la loi de X conditionnée par un événement $[Y = n]$

Définition de la loi de X sachant Y

Indépendance de deux variables aléatoires réelles discrètes

Théorème de transfert pour un couple de variables aléatoires discrètes finies

Stabilité de la loi binomiale

Stabilité de la loi de Poisson

Covariance d'un couple de variables aléatoires réelles discrètes

Lien(s) entre l'indépendance de deux variables aléatoires discrètes et leur covariance

Variance d'une somme de variables aléatoires réelles discrètes

Lien entre indépendance et non corrélation de variables aléatoires réelles discrètes

Énoncer l'inégalité de Markov

Énoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Énoncer la loi faible des grands nombres

Énoncer le théorème central limite

Théorème de Moivre-Laplace (approximation d'une loi binomiale)