Fonctions réelles de deux variables réelles

I Limite et continuité d'une fonction

Dans tout ce chapitre, on considère des fonctions f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
Le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f est l'ensemble des couples (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tels que $f(x, y)$ existe.

1. Applications partielles

Définition 1 Soit f une application de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$ où $\mathcal{D}$ est une partie de $\mathbb{R}^2$ et $(a, b) \in \mathcal{D}$.
Les deux applications partielles associées à f au point (a, b) sont définies par :

$$f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x, b) \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & f(a, y) \end{array}$$

Exercice 1 Déterminer et représenter le domaine de définition $\mathcal{D}$ de la fonction f où $f(x, y) = x\sqrt{y - x^2}$.
Déterminer les applications partielles associées à f en (a, b).

2. Surface représentative et courbe de niveau

Définition 2 Soit f une application de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$ où $\mathcal{D}$ est une partie de $\mathbb{R}^2$
Dans un repère (O, i, j, k) de l'espace, la représentation graphique de la fonction f est l'ensemble des point $M(x, y, z)$ tels que $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \mathcal{D}$.
Autrement dit, la surface représentative de f est l'ensemble $\mathcal{S} = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \mathcal{D}\}$.

Définition 3 Soit f une application de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$ où $\mathcal{D}$ est une partie de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{S}$ sa surface représentative.
Soit $c \in \mathbb{R}$, la courbe d'intersection de la surface $\mathcal{S}$ avec le plan horizontal d'équation $z = c$ est appelée courbe de niveau c de f.

Exercice 2 Déterminer le domaine de définition de f ainsi que les courbes de niveau 0 et 1 pour
1- Soit $f(x, y) = xy$ 2- Soit $f(x, y) = x^2 + y^2$

3. Notion de limite

Définition 4 Soit f une application définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Soit $(a, b) \in \overline{\mathcal{D}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.
f admet ℓ pour limite quand (x, y) tend vers (a, b) si, et seulement si :
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall (x, y) \in \mathcal{D}, \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \leqslant \delta \Rightarrow |f(x, y) - \ell| \leqslant \varepsilon.$
On note alors $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x) = \ell$.

Remarques • Si $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = \ell$ alors, les deux applications partielles associées à f en (a, b) admettent des limites égales à : $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = \ell$ et $\lim\limits_{y\to b} f_2(y) = \ell$. Mais la réciproque est fausse !

• Il est parfois intéressant de passer en coordonnées polaires en posant : $\begin{cases} x = a + r\cos t \\ y = b + r\sin t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.
On a alors $f(x, y)$ admet une limite losque (x, y) tend vers (a, b) si, et seulement si,
$f(a + r\cos t, b + r\sin t)$ admet une limite losque r tend vers 0.
Et dans ce cas : $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = \lim\limits_{r\to 0} f(a + r\cos t, b + r\sin t)$.

Exercice 3 Étudier le domaine de définition de f et la limite de f en $(0,0)$ de :

1- $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 2- $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$

Proposition 1 Soit f et g deux fonctions définies de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(a,b) \in \mathcal{D}$

Si $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(u) = \ell$ et $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(u) = \ell'$ alors

- $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} (f+g)(u) = \ell + \ell'$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \lambda f(u) = \lambda\ell$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} (f(u)g(u)) = \ell\ell'$
- Si $\ell' \neq 0$, $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \dfrac{f(u)}{g(u)} = \dfrac{\ell}{\ell'}$

4. Continuité

Définition 5 Soit f une application définie sur $\mathcal{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, $(a,b) \in \mathcal{D}$.

- f est continue en (a,b) si, et seulement si, $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$.
- f est continue sur $\mathcal{D}$ si, et seulement si, f est continue en tout point de $\mathcal{D}$

On note $\mathcal{C}^0(\mathcal{D},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathcal{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Remarque Si f est continue sur $\mathcal{D}$ et $(a,b) \in \mathcal{D}$ alors, les deux applications partielles associées à f en (a,b) sont continues sur leur domaine de définition. Mais la réciproque est fausse !

Proposition 2 Soit f et g deux applications sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, λ un réel.

Si f et g sont continues sur $\mathcal{D}$ alors

- $f+g$ et λf sont continues sur $\mathcal{D}$: $\mathcal{C}^0(A,\mathbb{R})$ est un espace vectoriel
- fg est continue sur $\mathcal{D}$
- si g ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue sur $\mathcal{D}$
- toute composition de fonctions continues est continue

Exercice 4 Étudier la continuité de f :

1- $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$ 2- $f(x,y) = \sin(x^2y - 2x + y)$

II Dérivées partielles et fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

1. Dérivées partielles et gradient

Définition 6 Soit f une application définie et continue sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$.

Soit $(a,b) \in \mathcal{D}$ (pas au bord de $\mathcal{D}$).

- f admet une dérivée partielle en (a,b) par rapport à x si, et seulement si, la première application partielle associée à f en (a,b) est dérivable en a
- f admet une dérivée partielle en (a,b) par rapport à y si, et seulement si, la deuxième application partielle associée à f en (a,b) est dérivable en b

Dans ce cas, on note $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = f_1'(a)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = f_2'(b)$.

Remarque $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = f_1'(a) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = f_2'(b) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h}$

Définition 7 Soit f une application définie et continue sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ et $(a,b) \in \mathcal{D}$.
Si f admet des dérivées partielles en (a,b) alors <u>le gradient de f en (a,b)</u> est le vecteur de coordonnées$\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b), \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)$.
On le note $\nabla f(a,b)$ ou $\overrightarrow{\text{grad}}_{(a,b)}(f)$.

Exercice 5 Déterminer le gradient de f en le point donné :
1- $f(x,y) = \sin(x^2y - 2x + y)$ en $(1,1)$
2- $f(x,y) = \ln(x-y)$ en $(2,1)$

Définition 8 Soit f une application définie et continue sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$.
Si f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathcal{D}$ alors
<u>Les fonctions dérivées partielles</u> sont définies sur $\mathcal{D}$ par :
$\dfrac{\partial f}{\partial x} : (x,y) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} : (x,y) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

Exercice 6 Déterminer les fonctions dérivées partielles de la fonction f définie par : $f(x,y) = \ln(x^2+y)$

Proposition 3 Opérations sur les dérivées partielles
Soit f et g deux applications définies sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Si f et g admettent des dérivées partielles en tout point de $\mathcal{D}$ alors
•$f+g$, λf ($\lambda \in \mathbb{R}$), fg, $\dfrac{f}{g}$ (si g ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$) admettent des dérivées partielles en tout point de $\mathcal{D}$:

•$\dfrac{\partial(f+g)}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial(f+g)}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial g}{\partial y}$

•$\dfrac{\partial(\lambda f)}{\partial x} = \lambda\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial(\lambda f)}{\partial y} = \lambda\dfrac{\partial f}{\partial y}$

•$\dfrac{\partial(fg)}{\partial x} = \dfrac{\partial(f)}{\partial x} \times g + f \times \dfrac{\partial(g)}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial(fg)}{\partial y} = \dfrac{\partial(f)}{\partial y} \times g + f \times \dfrac{\partial(g)}{\partial y}$

•$\dfrac{\partial\left(\dfrac{1}{f}\right)}{\partial x} = \dfrac{-\dfrac{\partial f}{\partial x}}{f^2}$ et $\dfrac{\partial\left(\dfrac{1}{f}\right)}{\partial y} = \dfrac{-\dfrac{\partial f}{\partial y}}{f^2}$

Proposition 4 Composition et dérivées partielles
Soit f une application définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$.
Soit x et y deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour lesquelles il existe un intervalle I de $\mathbb{R}$ tel que : $\forall t \in I,\ (x(t),y(t)) \in \mathcal{D}$.
Si f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathcal{D}$ et si x et y sont dérivables sur I
alors l'application composée $g : t \mapsto f(x(t),y(t))$ est dérivable sur I.

De plus, $\forall t \in I,\ g'(t) = x'(t)\dfrac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t)) + y'(t)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))$.

Exercice 7 Soit $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$ et $f(x,y) = \sqrt{x^2+2y^2+1}$.
Déterminer la dérivée de la fonction $g : t \mapsto f(x(t),y(t))$

2. Fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et approximation

Définition 9 Soit f une application définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On dit f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$ si, et seulement si, f admet des dérivées partielles par rapport à chaque variable en tout point de $\mathcal{D}$ et si ces deux dérivées partielles sont continues sur $\mathcal{D}$.
On note $\mathcal{C}^1(\mathcal{D},\mathbb{R})$ l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$.

Proposition 5 • Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}^2$, f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$ alors :
$f+g$, λf ($\lambda \in \mathbb{R}$) , fg et $\dfrac{f}{g}$ (si g ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$) sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$
• toute composition de fonction de classe $\mathcal{C}^1$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Proposition 6 Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Soit $(a,b) \in \mathcal{D}$ alors $\forall (h,k) \in \mathbb{R}^2 \ | \ (a+h,b+k) \in \mathcal{D}$,
$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + o(\sqrt{h^2+k^2}).$$
Autrement dit, pour (h,k) proche de $(0,0)$, on peut approcher l'application $(h,k) \mapsto f(a+h,b+k) - f(a,b)$ par l'applicaction linéaire $(h,k) \mapsto h\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$
Le plan d'équation $z = f(a,b) + (x-a)\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) + (y-b)\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ est le plan tangent à la surface représentative de f en le point de coordonnées $(a,b,f(a,b))$.

Exercice 8 Déterminer une équation du plan tangent à la surface d'équation $z = f(x,y)$ en le point $A(a,b,f(a,b))$:
1- $f(x,y) = \cos(x-y)$ en $(\frac{\pi}{2},0)$
2- $f(x;y) = \dfrac{2x}{y^2+1}$ en $(1,1)$

3. Extrema des fonctions de classe C¹

On définit les notions d'extremum relatif et d'extremum global de la même manière que pour les fonctions d'une variable.

Définition 10 Soit f une application définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $(a,b) \in A$.
• f présente un maximum (resp. minimum) global en (a,b) si, et seulement si :
$\forall (x,y) \in A,\ f(x,y) \leqslant f(a,b)$ (resp. $f(x,y) \geqslant f(a,b)$)
• f présente un maximum (resp. minimum) relatif en (a,b) si, et seulement si :
$\exists \delta > 0 \ | \ \forall (x,y) \in B_{(a,b)},\ f(x,y) \leqslant f(a,b)$ (resp. $f(x,y) \geqslant f(a,b)$) où
$B_{(a,b)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ | \ \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} \leqslant \delta\}$

Proposition 7 Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Si $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$ alors (a,b) est appelé un point critique.
Si f présente un extremum relatif en (a,b) alors $\nabla f(a,b) = 0$ c'est-à-dire $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$.

Remarques • Comme pour les fonctions d'une variable, la réciproque est fausse.
• Pour étudier les extrema d'une fonction, on cherche les points critiques puis, on détermine la nature de ces points en se ramenant à $O(0,0)$ (maximum, minimum, col...)

Exercice 9 Soit $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 + y^2$. Déterminer les points critiques de f et étudier leur nature.

III Fonctions de classe C²

Définition 11 Soit f une application définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$ si, et seulement si :
• f admet des dérivées partielles sur $\mathcal{D}$
• les deux dérivées partielles de f sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$

On note $\mathcal{C}^2(\mathcal{D},\mathbb{R})$ l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$.

Définition 12 Soit f une application définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$ alors les dérivées partielles d'ordre 2 de f sont les quatre dérivées partielles des dérivées partielles de f :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial y}$$

Proposition 8 Soit f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$.
• $f+g$ et λf sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$ ($\mathcal{C}^2(\mathcal{D},\mathbb{R})$ est un espace vectoriel)
• :fg, $\dfrac{f}{g}$ (si g ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$) sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$.
• toute composition de fonction de classe $\mathcal{C}^2$ est de classe $\mathcal{C}^2$.

Proposition 9 Théorème de Schwarz
Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ alors $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Exercice 10 Calculer les dérivées partielles secondes de $f(x,y) = 2x^3 + y^3 + 2xy^2$.