Corrigé DM10 Matrice de Gram

1. **a.** À partir des listes u et v, on calcule la somme $\sum_{i=1}^{n} u_i v_i$ où n est la longueur des listes u et v :

```python
def prod_scal(u,v):
    n = len(u)
    return sum([u[i]*v[i] for i in range(n)])
```

b. On crée un tableau numpy nul de taille (p,p) où p est la longueur de la liste L puis, pour tout (i,j) de $[\![1,p]\!]^2$, on définit le terme d'indices (i,j) comme étant égal au produit scalaire $\langle u_i,u_j\rangle$:

```python
import numpy as np
def Gram(L):
    p = len(L)
    G = np.zeros((p,p))
    for i in range(p):
        for j in range(p):
            G [i,j] = prod_scal(L[i],L[j])
    return G
```

2. Comme le produit scalaire est symétrique, $\forall (i,j)\in[\![1,p]\!]^2$, $\langle u_i,u_j\rangle=\langle u_j,u_i\rangle$, G est symétrique réelle donc $\boxed{\text{la matrice } G \text{ est diagonalisable}}$.

3. La matrice de Gram de la famille (u_1,u_2) est $G=\begin{pmatrix}\langle u_1,u_1\rangle & \langle u_1,u_2\rangle\\ \langle u_2,u_1\rangle & \langle u_2,u_2\rangle\end{pmatrix}$.

G est inversible si, et seulement si, son déterminant est non nul.
Or $\det G=\langle u_1,u_1\rangle\langle u_2,u_2\rangle-\langle u_1,u_2\rangle\langle u_2,u_1\rangle=\|u_1\|^2\|u_2\|^2-\langle u_1,u_2\rangle^2$.
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, $|\langle u_1,u_2\rangle|\leqslant\|u_1\|\,\|u_2\|$ et $|\langle u_1,u_2\rangle|=\|u_1\|\,\|u_2\|$ si, et seulement si, u_1 et u_2 sont liés.
Cela nous conduit à $\langle u_1,u_2\rangle^2=(\|u_1\|\,\|u_2\|)^2$ si, et seulement si, u_1 et u_2 sont colinéaires.
On en déduit que $\det G\neq 0\Leftrightarrow u_1$ et u_2 ne sont pas liés. Autrement dit,

$\boxed{\text{la matrice de Gram de la famille } (u_1,u_2) \text{ est inversible si, et seulement si, la famille } (u_1,u_2) \text{ est libre}}$

4. **a.** Par bilinéarité du produit scalaire, $\forall i\in[\![1,p]\!]$, $\sum_{k=1}^{p} a_k\langle u_i,u_k\rangle=\left\langle u_i,\sum_{k=1}^{p} a_k u_k\right\rangle=\langle u_i,0\rangle$.

On a bien : $\boxed{\forall i\in[\![1,p]\!],\ \sum_{k=1}^{p} a_k\langle u_i,u_k\rangle=0}$.

b. Par définition GX est la matrice colonne $\left(\sum_{k=1}^{p} a_k\langle u_i,u_k\rangle\right)_{i\in[\![1,p]\!]}$.

D'après **a.**, on a bien $\boxed{GX=0}$.
Comme G est supposée inversible, en multipliant à gauche par G^{-1}, on a $GX=0\Rightarrow X=0$.
Ainsi si $\sum_{k=1}^{p} a_k u_k=0$ alors $\forall k\in[\![1,p]\!]$, $a_k=0$: $\boxed{\text{la famille } (u_1,\dots u_p) \text{ est libre}}$.

5. **a.** Par définition et bilinéarité du produit scalaire, $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2$,
$\|v_i-v_j\|^2=<v_i-v_j,v_i-v_j>=<v_i,v_i>-<v_j,v_i>-<v_i,v_j>+<v_j,v_j>$.
Comme $<v_i,v_i>=\|v_i\|^2$, $<v_j,v_i>=<v_i,v_j>$ et $<v_j,v_j>=\|v_j\|^2$,
on a bien : $\boxed{\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ \|v_i-v_j\|^2=\|v_i\|^2+\|v_j\|^2-2<v_i,v_j>}$.

b. On déduit que : $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $<v_i,v_j>=\frac{1}{2}(\|v_i\|^2+\|v_j\|^2-\|v_i-v_j\|^2)$.
Comme $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\|v_i\|=1$ et $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, tel que $i\neq j$, $\|v_i-v_j\|=1$,
on a $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $<v_i,v_i>=\|v_i\|^2=1$ et $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, tel que $i\neq j$, $<v_i,v_j>=\frac{1}{2}$.

D'où $\boxed{\text{la matrice de Gram } G \text{ de la famille } (v_1,\dots,v_n)\ G = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}}$.

c. $A = 2G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix} = I_n + J_n$ où $J_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

Or $I_nJ_n = J_nI_n = J_n$ et $J_n^2 = nJ_n$ donc $A^2 = I_n + 2J_n + J_n^2 = I_n + (n+2)J_n$.

Finalement, $A^2 = I_n + (n+2)(A - I_n)$ et donc $\boxed{A^2 = (n+2)A - (n+1)I_n}$.

d. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Si λ est valeur propre de A alors $\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X \neq 0 \mid AX = \lambda X$.

D'où $A^2X = \lambda AX = \lambda^2 X$ et $A^2X - (n+2)AX + (n+1)X = (\lambda^2 - (n+2)\lambda + (n+1))X$.

Comme $A^2 - (n+2)A + (n+1)I_n$ et $X \neq 0$,

$\boxed{\text{si } \lambda \text{ est valeur propre de } A \text{ alors } \lambda^2 - (n+2)\lambda + (n+1) = 0}$.

Comme $(n+1)+1 = n+2$ et $(n+1)\times 1 = n+1$, le trinôme $\lambda^2 - (n+2)\lambda + (n+1)$ admet pour racines 1 et $n+1$.

Pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, on pose X_i la matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont le i-ième coefficient vaut 1, le $(i+1)$-ième vaut -1 et tous les autres 0.

Alors $\forall i \in [\![1, n-1]\!],\ AX_i = (I_n + J_n)X_i = X_i + J_nX_i$.

Comme $J_nX_i = 0$, on a $\forall i \in [\![1, n-1]\!],\ AX_i = X_i$.

De plus $\forall i \in [\![1, n-1]\!],\ AX_i = X_i \Leftrightarrow 2GX_i = X_i \Leftrightarrow GX_i = \frac{1}{2}X_i$. On en déduit que $\frac{1}{2}$ est valeur propre de G et $\forall i \in [\![1, n-1]\!],\ X_i \in E_{\frac{1}{2}}(G)$.

Par ailleurs, soit $(a_1, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ tel que $a_1X_1 + \cdots + a_{n-1}X_{n-1} = 0$ alors $a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$ donc la famille $(X_1, \cdots, X_{n-1})$ est libre et $\dim E_{\frac{1}{2}}(G) \geqslant n-1$.

On pose X_n la matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 alors $AX_n = (n+1)X_n$ donc $GX_n = \frac{n+1}{2}X_n$.

On en déduit que $\frac{n+1}{2}$ est valeur propre de G et $X_n \in E_{\frac{n+1}{2}}(G)$.

Comme $\dim E_{\frac{1}{2}}(G) + \dim E_{\frac{n+1}{2}}(G) \leqslant n$, on déduit que $\dim E_{\frac{1}{2}}(G) = n-1$ et $\dim E_{\frac{n+1}{2}}(G) = 1$ et donc que $(X_1, \cdots, X_{n-1})$ est une base de $E_{\frac{1}{2}}(G)$ et (X_n) est une base de $E_{\frac{n+1}{2}}(G)$.

Comme $\frac{1}{2}$ et $\frac{n+1}{2}$ sont des valeurs propres distinctes de G, $\mathcal{B} = (X_1, \cdots, X_n)$ est une partie libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Enfin, comme $\operatorname{card}\mathcal{B} = n = \dim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\mathcal{B} = (X_1, \cdots, X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de valeurs propres de G.

Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{B}$ alors

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ G = PDP^{-1} \text{ où } D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{n+1}{2} \end{pmatrix}}.$$

e. Comme 0 n'est pas valeur propre de G, $\boxed{\text{la matrice } G \text{ est inversible}}$.

D'après **4.**, comme G est inversible, la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est libre.

Étant de cardinal égal à la dimension de $\mathbb{R}^n$, $\boxed{\text{la famille } (v_1, \dots, v_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}^n}$.